Prof. N. A'Campo Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Infini II

8. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $k \in \mathbb{N}, k > 0$,, sei $\phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $\phi_k(t) = 0$ für $|t| > 1$ und mit $\phi_k(t) = (1 - t^2)^k$ für $|t| \leq 1$. Zeige, dass die Funktion ϕ_k k-mal stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 2. Sei $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$v \in \mathbb{R}^n \mapsto r_n(v) = \sqrt{x_1(v)^2 + x_2(v)^2 + \cdots + x_n(v)^2} \in \mathbb{R}$$

Sei $\Phi_{n,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion $\Phi_k = \phi_k \circ r_n$. Wie oft ist $\Phi_{n,k}$ stetig differenzierbar?

Aufgabe 3. Sei $a_{k,n} := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{n,k}(v) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ und sei $\Psi_{n,k} := \frac{1}{a_{n,k}} \Phi_{n,k}$. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, d.h. eine stetige Funktion mit der Mittelwerteigenschaft. Zeige: $f * \Psi_{n,k} = f$. Schliesse, dass eine harmonische Funktion f k-mal stetig differenzierbar ist, $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4. Sei V ein reeller endlich dimensionaler Vektorraum mit Basis $e_1, e_2, \cdots, e_n$. Sei V^* der Raum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{R}$. Für $1 \leq i \leq n$ sei $e_i^* \in V^*$ durch $e_i^*(e_j) = 1$ für $i = j$ und durch $e_i^*(e_j) = 0$ für $i \neq j$ festgelegt. Zeige, dass $e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*$ eine Basis für V^* sind. Wir statten V mit der Norm $||v||_{\text{Max}} := \text{Maximum}\{|e_1^*(v)|, |e_2^*(v)|, \cdots, |e_n^*(v)|\}$ aus. Wir statten V^* mit der Operatornorm $||L||_{\text{Operator}} := \text{Supremum}\{|L(v)| \mid v \in V, \, ||v||_{\text{Max}} \leq 1\}$ aus. Zeige, dass auf V^* Operatornorm und Summennorm $||L||_{\text{Summe}} := |L(e_1)| + |L(e_2)| + \cdots + |L(e_n)|$ uebereinstimmen. Für welche Dimensionen n sind die Räume $(V, || \, ||_{\text{Max}})$ und $(V^*, || \, ||_{\text{Operator}})$ isometrisch?

Aufgabe 5. Eine Familie $(z_\alpha)_{\alpha \in A}$ von komplexen Zahlen heisst *summierbar*, wenn für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, eine endliche Teilmenge $I \subset A$ existiert derart, dass für jede endliche Teilmenge $J \subset A$ mit $I \cap J = \emptyset$ gilt: $|\sum_{\alpha \in J} z_\alpha| \leq \epsilon$. Ist die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1}$ konvergent? Ist die Familie $(\frac{(-1)^n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar?

Aufgabe 6. Für welche Zahlen $z \in \mathbb{C}$ ist die Folge der Cesaro Summen der Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ konvergent?

Aufgabe 7. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Folge der Cesaro Summen der Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sin(nx)$ konvergent?