Prof. N. A'Campo

Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Infini II

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikt}$. Zeige für eine stetige und 1-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dass die Faltung

$$f * D_n(x) := \int_0^1 f(t) D_n(x-t)dt = \int_0^1 f(x-t) D_n(t)dt$$

die Partialsumme $\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{FR}_k(f) e^{2\pi ikx}$ der Fourierreihe von f darstellt.

Aufgabe 2. Zeige: $D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$. Hinweis: $\sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikt}$ ist eine geometrische Reihe.

Aufgabe 3. Für $N \in \mathbb{N}$ sei $F_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t)$. Zeige, dass die Faltung

$$f * F_N(x) := \int_0^1 f(t) F_N(x-t)dt = \int_0^1 f(x-t) F_N(t)dt$$

eine Cesaro-Partialsumme der Fourierreihe von f darstellt.

Aufgabe 4. Zeige: $F_N(t) = \frac{1}{N} \frac{\sin(N\pi t)^2}{\sin(\pi t)^2}$.

Aufgabe 5. Zeige: $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F_N(t)dt = 1$. Zeige für $h \in \mathbb{R}, 0 < h < \frac{1}{2}$ und $t \in [h, \frac{1}{2}]$ oder $t \in [-\frac{1}{2}, -h]$ die Abschätzung $0 \le F_N(t) \le \frac{1}{Nh^2}$ und schliesse:

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t) F_N(t)dt - \int_{-h}^{h} f(x-t) F_N(t)dt = 0$$

Aufgabe 5. Zeige:

$$\int_{-h}^{h} f(x-t) F_N(t)dt \ge \text{Infimum}\{f(x-t) \mid t \in [-h,h]\} \int_{-h}^{h} F_N(t)dt$$

$$\int_{-h}^{h} f(x-t) F_N(t)dt \le \text{Supremum}\{f(x-t) \mid t \in [-h,h]\} \int_{-h}^{h} F_N(t)dt$$

Aufgabe 6. Schliesse, dass der Grenzwert $\lim_{N\to+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t) F_N(t)dt$ existiert und gleich $f(x)$ ist. Hinweis: Zeige vorerst $\lim_{h\to 0, h>0} \text{Infimum}\{f(x-t) \mid t \in [-h,h]\} = f(x)$ und $\lim_{h\to 0, h>0} \text{Supremum}\{f(x-t) \mid t \in [-h,h]\} = f(x)$.

Aufgabe 7. Sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 1-periodisch. Wir nehmen an, dass alle Fourierkoeffizienten $\mathrm{FR}_k(g), k \in \mathbb{Z}$ gleich 0 sind. Zeige: $g = 0$.

Aufgabe 8. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar und 1-periodisch. Zeige, dass die Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{FR}_n(f)e^{2\pi nx}$ für die Norm $|| \ ||_{C^0}$ konvergiert und eine stetige 1-periodische Funktion

$$x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{FR}_n(f)e^{2\pi nx} \in \mathbb{C}$$

definiert. Zeige: $f = F$. Hinweis: Setze $g = f - F$ und berechne die Fourierkoeffizienten von g.

Aufgabe 9. Berechne die Fourierkoeffizienten der Funktion $t \mapsto |\sin(2\pi t)|$. Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int_0^1 |\sin(t)| \sin(2\pi nt)dt = 0$ und für n ungerade, gilt $\int_0^1 |\sin(t)| \cos(2\pi nt)dt = 0$.

Aufgabe 10. Zeige: $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-1+4n^2)^2}$.