Prof. N. A'Campo Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Infini II

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Finde eine beschränkte und stetige Funktion $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, die nicht die Einschränkung auf $]0,1]$ einer stetigen Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2. Sei die Funktion $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 1. Zeige, dass zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]0,1]$ existieren, derart, dass die Folgen
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}, (f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$
konvergent sind und dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Aufgabe 3. Sei die Funktion $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 1. Sei $F :]0,1] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Funktion f. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $]0,1]$ derart, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind. Zeige, dass aus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

folgt:

$$\lim_{n\to\infty} F(a_n) = \lim_{n\to\infty} F(b_n)$$

Aufgabe 4. Seien f, F wie in Aufgabe 3. Zeige, dass eine stetige Funktion $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert, die auf $]0,1]$ gleich F ist.

Aufgabe 5. Berechne für $n \in \mathbb{Z}$ die Integrale $\int_0^1 x^2 e^{2\pi i n x} dx$, $\int_0^1 x^3 e^{2\pi i n x} dx$ und $\int_0^1 x^4 e^{2\pi i n x} dx$.

Aufgabe 5. Stelle graphisch die 1-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da, die auf $[0,1]$ durch $x \in [0,1] \mapsto x - x^2$ gegeben ist.

Aufgabe 6. Berechne die Fourierreihe der Funktion f aus Aufgabe 5.

Aufgabe 7. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 1-periodische Funktion, derart dass das Integral $\int_0^1 f(t)\bar{f}(t)dt$ existiert. Definiere $||f||_{L^2} := \sqrt{\int_0^1 f(t)\bar{f}(t)dt}$. Zeige, dass $||\,||_{L^2}$ eine Norm auf dem Raum aller stetigen 1-periodischen komplexwertigen Funktion auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 8. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 1-periodische Funktion derart, dass das Integral $\int_0^1 f(t)\bar{f}(t)dt$ existiert. Seien $c_n(f), n \in \mathbb{Z}$ die Fourierkoeffizienten von f. Zeige für $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung von Bessel:

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\bar{c}_n(f) \leq ||f||_{L^2}^2$$

Hinweis: Setze $g(t) := f(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{2\pi int}$. Zeige $0 \leq ||g||_{L^2}^2 = ||f||_{L^2}^2 - \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\bar{c}_n(f)$.

Aufgabe 9. Zeige für $0 < x < 2\pi$ die Identität:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

Hinweis:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} = \int_{\pi}^{x} \cos(nt)dt =$$

$$\int_{\pi}^{x} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}dt + \frac{\pi - x}{2}$$

Schliesse mit einem Satz von Riemann.

Aufgabe 10. Berechne die Fourierkoeffizienten der 2π-periodische Funktion f mit $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, 0 < x < 2\pi$. Zeige:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$