Prof. N. A'Campo Sommersemester 2005

Übungen zur Vorlesung Infini II

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $\phi(t) = \sin(t)$ für $t \in [0, \pi]$ und mit $\phi(t) = 0$ für $t > \pi$. Gesucht ist eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $f''(t) + f(t) = \phi(t)$.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(t) = (-1)^{[t]}(t - [t] - \frac{1}{2})$. Sei für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Einschränkung von $t \in \mathbb{R} \mapsto f(3^n t) \in \mathbb{R}$ auf $[0,1]$. Zeige, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen der Reihe $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} f_n$ eine Cauchyfolge im Banachraum $C^0([0,1], \mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Sei $g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ der Grenzwert der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige, dass für $a, b \in [0,1], a < b$, die Einschränkung der Funktion g auf $[a, b]$ nicht monoton ist.

Aufgabe 4. Gesucht ist eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(t) - \int_0^t \sin(s) f(s) ds = \sin(t)$ für $t \in [0,1]$. Betrachte die Abbildung $I : C^0([0,1], \mathbb{R}) \to C^0([0,1], \mathbb{R})$ mit $I(g)(t) = \int_0^t \sin(s) g(s) ds + \sin(t)$ für $g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ und $t \in [0,1]$. Bemerke, dass die gesuchte Funktion $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ die Gleichung $f = I(f)$ erfüllt. Sei $f_0 \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ irgendein Lösungsansatz für die Gleichung $f = I(f)$. Definiere rekursiv in $C^0([0,1], \mathbb{R})$ die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n+1} = I(f_n)$. Zeige, dass

$$||f_{n+1} - f_n||_{C^0} \leq (1 - \cos(1))||f_n - f_{n-1}||_{C^0}$$

gilt. Hinweis: Zeige für $a, b \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ die Ungleichung

$$||I(a) - I(b)||_{C^0} \leq (1 - \cos(1))||a - b||_{C^0}$$

Somit ist die Abbildung I Lipschitz. Der Faktor erfüllt $1 - \cos(1) < 1$. Schliesse, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C^0([0,1], \mathbb{R})$ ist. Zeige, dass der Grenzwert $g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ die Gleichung $g = I(g)$ erfüllt.

Aufgabe 4. (Fortsetzung) Zeige, dass die Funktion g die Differentialgleichung $g'(t) - \sin(t)g(t) = \cos(t)$ erfüllt.

Aufgabe 5. Zeige die Existenz einer differenzierbaren Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g'(t) - \sin(t)g(t) = \sqrt{|t - \frac{1}{2}|}$. Hinweis: Wähle die Abbildung $I : C^0([0,1], \mathbb{R}) \to C^0([0,1], \mathbb{R})$ geschickt.

Aufgabe 6. Zeige die Existenz einer differenzierbaren Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g'(t) - \sin(t)g(t-1) = \log(t+1)$. Hinweis: Wähle die Abbildung $I : C^0([0,1], \mathbb{R}) \to C^0([0,1], \mathbb{R})$ geschickt.