Prof. N. A'Campo Sommersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini II

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 0. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass 13 Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Zeige, dass 37 nicht Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 1. Sei V der Vektorraum aller Funktionen $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, die stetig differenzierbar sind, d.h. die differenzierbar sind und deren abgeleitete Funktion $f' : [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig ist. Wir betrachten auf V die Normen

$$||f||_{C^1} := \text{Supremum}_{t\in[-1,1]}(|f(t)|) + \text{Supremum}_{t\in[-1,1]}(|f'(t)|)$$

und

$$||f||_V := |f(0)| + \text{Supremum}_{t\in[-1,1]}(|f'(t)|)$$

Zeige, dass $||\,||_{C^1}$ und $||\,||_V$ tatsächlich Normen auf V sind. Zeige, dass die Normen äquivalent sind.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Konstruiere in V für die Norm

$$||f||_{C^0} := \text{Supremum}_{t\in[-1,1]}(|f(t)|)$$

eine Cauchyfolge, die in V nicht konvergent ist. Hinweis: Für $n > 0$ ganz, sei $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade Funktion mit $g_n(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$ für $0 \le t \le \frac{\pi}{2n}$ und mit $g_n(t) = 1$ für $t \ge \frac{\pi}{2n}$. Für $n > 0$ ganz, sei $f_n : [-1,] \to \mathbb{R}$ die stetig differenzierbare Funktion $f_n(t) = \int_0^t g_n(s)ds$. Zeige, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die $||\,||_{C^0}$ gegen die Einschränkung der Betragsfunktion $t \mapsto |t|$ konvergiert. Schliesse, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die Norm $||\,||_{C^0}$ eine Cauchyfolge ist, und schliesse weiter, dass die Folge für die Norm $||\,||_{C^0}$ in V nicht konvergiert.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass die Ableitung $x \in \mathbb{R} \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ stetig ist. Zeige, dass $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existieren, derart dass auf $[a,b]$ die Funktion f monoton ist.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, derart dass auf $[a,b]$ die Funktion f monoton ist?

Aufgabe 5. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $\gamma_f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve $\gamma_f(t) = (t, f(t))$. Sei für $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ auf $\mathbb{R}^2$ die Norm $||\,||_{\max,\epsilon}$ mit $||(x,y)||_{\max,\epsilon} := ||(\epsilon x, y)||_{\max}$ definiert. Sei L_ϵ die Länge von der Kurve γ_f bezüglich der Norm $||\,||_{\max,\epsilon}$. Wir definieren die *Variation* von f als $\text{Var}(f) = \text{Infimum}\{L_\epsilon \mid \epsilon > 0\}$. Berechne die Variation der Einschränkung auf $[-1,1]$ der Funktion $t \in [-1,1] \mapsto tf(t) \in R$ wobei f die Funktion der Aufgabe 1, Blatt 3 ist.

Aufgabe 6. Sei $f : [a, b] \to R$ monoton. Berechne die Variation von f.

Aufgabe 7. Sei $f, g : [a, b] \to R$ Funktionen. Zeige

$$\mathrm{Var}(f + g) \leq \mathrm{Var}(f) + \mathrm{Var}(g)$$

Aufgabe 8. Sei $f : [a, b] \to R$ stetig. Lässt sich f darstellen als Differenz $f = f^+ - f^-$ wobei $f^\pm$ monoton sind?

Aufgabe 9. Sei $f : [a, b] \to R$ differenzierbar mit stetiger Ableitung. Zeige, dass f sich als Differenz $f = f^+ - f^-$, wobei $f^\pm$ monoton sind, darstellen lässt. Hinweis: $f^+(t)$ ist die Variation der Einschränkung von f auf $[a, t], a \leq t \leq b$.

Aufgabe 10. Sei $f : [a, b] \to R$ Lipschitz stetig. Zeige, dass f sich als Differenz $f = f^+ - f^-$, wobei $f^\pm$ monoton sind, darstellen lässt.