Prof. N. A'Campo — Sommersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini II

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $x \in \mathbb{R}$ sei die Gausssche Klammer $[x]$ die grösste ganze Zahl k mit $k \leq x$. Sei die gerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert: $f(0) = 0$ und für $x \in \mathbb{R}, x > 0$, gilt $f(\frac{1}{x}) = 2\frac{-1^{[x]}}{x}(x - [x] - \frac{1}{2})$. Zeige, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $k \in \mathbb{R}$ existiert, derart dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Ist f stetig? Ist f auf $\mathbb{R}$ gleichmässig stetig? Ist f auf $[-1, 1]$ gleichmässig stetig? Ist f auf $[-1, 1]$ Lipschitz?

Aufgabe 2. Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve $\gamma(t) = (t, f(t))$, wobei f wie in Aufgabe 1 ist. Berechne die Länge von γ bezüglich einer Norm auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass die Ableitung $x \in \mathbb{R} \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ stetig ist. Zeige, dass $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existieren, derart dass auf $[a, b]$ die Funktion f monoton ist.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, derart dass auf $[a, b]$ die Funktion f monoton ist?

Aufgabe 5. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $\gamma_f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve $\gamma_f(t) = (t, f(t))$. Sei für $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ die Norm $|| \; ||_{\max,\epsilon}$ mit $||(x, y)||_{\max,\epsilon} := ||(\epsilon x, y)||_{\max}$. Sei L_ϵ die Länge von der Kurve γ_f bezüglich der Norm $|| \; ||_{\max,\epsilon}$. Wir definieren die *Variation* von f als $\mathrm{Var}(f) = \mathrm{Infimum}\{L_\epsilon \mid \epsilon > 0\}$. Berechne die Variation der Einschränkung auf $[-1, 1]$ der Funktion f der Aufgabe 1.

Aufgabe 6. Sei $f : [a, b] \to R$ monoton. Berechne die Variation von f.

Aufgabe 7. Sei $f : [a, b] \to R$ stetig. Lässt sich f darstellen als Differenz $f = f^+ - f^-$ wobei $f^\pm$ monoton sind?

Aufgabe 8. Sei $f : [a, b] \to R$ differenzierbar mit stetiger Ableitung. Zeige, dass f sich als Differenz $f = f^+ - f^-$, wobei $f^\pm$ monoton sind, darstellen lässt. Hinweis: $f^+(t)$ ist die Variation der Einschränkung von f auf $[a, t], a \leq t \leq b$.