Prof. N. A'Campo — Sommersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini II

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei V der reeller Vektorraum aller polynomialen Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dritten Grades. Für $s \in \mathbb{R}$ sei $N_s : V \to \mathbb{R}$ die Abbildung $N_s(f) = \sqrt{\int_0^1 f(x)f(x-s)dx}$. Zeige, dass N_0 eine Norm auf V ist. Ist N_1 eine Norm auf V? Ist N_s nur für $s = 0$ eine Norm auf V? Ist $f \in V \mapsto |f(0)| + |f(1)| + |f(2)| + |f(3)| \in \mathbb{R}$ eine Norm auf V?

Aufgabe 2. Sei $s \in \mathbb{R}$. Ist die Abbildung $f \in V \mapsto \int_0^1 f(x)f(x-s)dx \in \mathbb{R}$ differenziebar? Ist N_0 differenzierbar?

Aufgabe 3. Ist die Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(\sqrt{|x|})^3 \in \mathbb{R}$ differenzierbar? Hinweis: Unterscheide zwei Fälle $x \neq 0$ und $x = 0$.

Aufgabe 4. Zeige (und benütze in Aufgabe 3) die Ungleichung $|\sin(x)| \leq |x|, x \in \mathbb{R}$. Hinweis: aus $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ folgt $|\cos(x)| \leq 1$. Bedenke weiter für $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, dass $\sin(x) = \int_0^x \cos(t)dt \leq \int_0^x 1dt = x$ gilt.

Aufgabe 5. Sei M der Vektorraum aller reellen 2×2. Sei $\det : M \to \mathbb{R}$ die Abbildung $A \in M \mapsto \text{Determinante}(A) \in \mathbb{R}$. Berechne das Differential $(D\det)_{\mathrm{Id}}$. Ansatz: $\det(Id + H) = \det(Id) + \text{Spur}(H) + \text{Rest}(H)$.

Aufgabe 6. Zeige für $t = 0$ und $A \in M$:

$$\det(e^{tA}) = e^{\text{Spur}(tA)}$$

Zeige:

$$\frac{d}{dt}(\det(e^{tA}) - e^{\text{Spur}(tA)}) = 0$$

Schliesse:

$$\det(e^{A}) = e^{\text{Spur}(A)}$$