Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini II

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\sin(t) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Für $0 < t < 2$ zeige: $\sin(t) > t - t^3/6 > 0$. Hinweis: für $k \in \mathbb{N}, k \geq 2, (-1)^k > 0$, und $0 < t < 2$ gilt $\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{t^{2(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!} > 0$.

Aufgabe 2. Zeige: $\sin(4) < 0$.

Aufgabe 3. Wir definieren die Zahl π wie folgt: $\pi := \text{Infimum}\{t \in \mathbb{R} \mid t > 0, \sin(t) = 0\}$. Zeige: $2 \leq \pi < 4$.

Aufgabe 4. Bestimme alle $t \in \mathbb{R}$ mit $e^{it} = 1$. Hinweis: $e^{it} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sin(t) + i\cos(t)$.

Hier definieren wir: $\cos(t) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}$.

Aufgabe 5. Zeige für $a, b \in \mathbb{R}$: $\int_a^b e^{it}dt = \frac{1}{i}(e^{ib} - e^{ia})$.

Aufgabe 6. Zeige für $a, b \in \mathbb{R}$ die Äquivalenz der Aussagen (i) und (ii):

(i) $\int_a^b e^{it}dt = 0$

(ii) $\frac{b-a}{2\pi} \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 6. Sei $R_{A,B}$ in $\mathbb{R}^2$ das Rechteck $R_{A,B} := [0, A] \times [0, B]$. Zeige, dass

$$\int_0^{2\pi A}(\int_0^{2\pi B} \sin(x)\sin(y)dy)dx = 0$$

nur dann gilt, wenn A oder B eine ganze Zahl ist.

Zeige, dass

$$\int_{2\pi a}^{2\pi A}(\int_{2\pi b}^{2\pi B} e^{ix}e^{iy}dy)dx = 0$$

nur dann gilt, wenn $A - a$ oder $B - b$ eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 7. Sei das Rechteck $R_{A,B}$ die Vereinigung von endlich vielen Rechtecken $R_i := [a_i, A_i] \times [b_i, B_i], a_i < A_i, b_i < B_i, 1 \leq i \leq N$, derart, dass für jedes $i, 1 \leq i \leq N$, die Differenz $A_i - a_i$ oder $B_i - b_i$ eine rationale Zahl ist und dass gilt $AB = \sum_{i=1}^{N}(A_i - a_i)(B_i - b_i)$. Zeige, dass A oder B eine rationale Zahl ist. Hinweis: Interpretiere geometrisch die Annahme $AB = \sum_{i=1}^{N}(A_i - a_i)(B_i - b_i)$. Wähle $C \in \mathbb{N}, C > 0$, derart, dass für jedes $i, 1 \leq i \leq N$,