Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/05

Übungen zur Vorlesung Analysis und Geometrie I.

9. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. (Satz von Poincaré-Bendixon). Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, sei $X : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, sei $p \in U$ und sei $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \to U$ die Lösungskurve mit $\gamma(0) = p$ der Differentialgleichung zum Vektorfeld X. Wir nehmen an, dass der Abschluss B der Bahn $\gamma(\mathbb{R}_{\geq 0})$ in U kompakt ist und dass das Vektorfeld X keine Nullstellen in B hat. Zeige, dass eine nicht konstante, periodische Lösungskurve $\sigma : \mathbb{R} \to U$ mit $\sigma(\mathbb{R}) \subset B$ der Differentialgleichung zu X existiert.

Aufgabe 2. Sei $X : S^2 \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Tangentialvektorfeld an $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Zeige, dass X eine Nullstelle hat. Hinweis: Approximiere X mit stetig differenzierbaren Tangentialvektorfeldern. Wende den Satz von Poincaré-Bendixon an. Benutze eine steriographische Projektion.

Aufgabe 3. Konstruiere ein differenzierbares Tangentialvektorfeld X auf S^2 mit $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, Nullstellen. Konstruiere eine differenzierbare 1-Differentialform ω mit $\omega(X) > 0$ im Komplement der Nullstellen von X.

Aufgabe 4. Sei X auf S^2 ein stetiges Tangentialvektorfeld mit endlich vielen Nullstellen. Sei ω eine differenzierbare geschlossenne 1-Differentialform mit $\omega(X) > 0$ im Komplement der Nullstellen von X. Zeige, dass X mindestens zwei Nullstellen hat.

Aufgabe 5. (Satz von George Reeb). Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $d > 0$. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Morsefunktion mit zwei kritischen Punkten. Konstruiere eine bijektive differenzierbare Abbildung $\phi : M \to S^d$. Hinweis: Statte M mit einer Riemannschen Metrik aus. Benutze das Gradientenvektorfeld der Morsefunktion.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Sei $d = 2$. Konstruiere eine bijektive differenzierbare Abbildung $\phi : M \to S^2$, derart dass auch die Umkehrabbildung differenzierbar ist. Hinweis: Inf I, II. Zeige folgendes Lemma: Sei D^2 die Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$. Ein Diffeomorphismus des Randes $\phi : \partial D^2 \to \partial D^2$ lässt sich als Diffeomorphismus $\Phi : D^2 \to D^2$ fortsetzen.

Aufgabe 7. (Fortsetzung). Sei $d = 3$. Konstruiere eine bijektive differenzierbare Abbildung $\phi : M \to S^3$, derart dass auch die Umkehrabbildung differenzierbar ist. Hinweis: Funktionentheorie. Zeige folgendes Lemma: Sei D^3 der Ball in $\mathbb{R}^3$. Ein Diffeomorphismus des Randes $\phi : \partial D^3 \to \partial D^3$ lässt sich als Diffeomorphismus $\Phi : D^3 \to D^3$ fortsetzen.

Aufgabe 8. (Fortsetzung). Sei $7 > d > 3$. Eine bijektive differenzierbare Abbildung $\phi : M \to S^d$ mit differenzierbarer Umkehrabbildung existiert. Jean Cerf d=4, Stephen Smale d=5,John Milnor d=6.

Aufgabe 9. (Fortsetzung). Sei $d > 6$. John Milnor hat kompakte Mannigfaltigkeiten M mit Morsefunktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit zwei kritischen Punkte konstruiert, die nach dem Satz von Reeb homöomorph aber, wie von Milnor gezeigt, nicht diffeomorph zur Sphäre S^d sind.
See: `http://www.maths.ed.ac.uk/ãar/surgery/exoticspheres.pdf`
`http://www.math.sunysb.edu/j̃ack/PREPRINTS/poi-04a.ps`