Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini I

8. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $A \subset \mathbb{R}$. Ein Element $a \in \mathbb{R}$ heisst *lokales* Maximum von A, wenn $a \in A$ gilt und wenn ein $r \in \mathbb{R}, r > 0$, existiert, derart, dass für jedes $b \in A$ mit $|b - a| < r$ die Ungleichung $b \leq a$ zutrifft. Ein lokales Maximum a von A heisst s-lokal, wobei $s \in \mathbb{R}, s > 0$, gegeben ist, wenn für jedes $b \in A$ mit $|b - a| < s$ die Ungleichung $b \leq a$ zutrifft. Zeige, dass die Teilmenge A höchtens abzählbar viele lokale Maxima hat. Hinweis: für $N \in \mathbb{N}, N \geq 1$, zeige, dass A höchtens $2N^2 + 1$ $\frac{1}{N}$-lokale Maxima m mit $|m| \leq N$ hat.

Aufgabe 2. Sei D die Menge aller rationalen Zahlen $\frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, q > 0, p \in \mathbb{N}, p < q$. Hat D ein lokales Maximum?

Aufgabe 3. Sei P die Menge aller Brüche $\frac{3^p}{2^q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, 3^p < 2^q$. Hat die Menge P lokale Maxima?

Aufgabe 4. Sei T die Menge aller Dezimalzahlen $0, c_1c_2c_3 \cdots$ mit $c_i \in \{0, 5\}, i = 1, 2, \cdots$. Ist die Menge T abzählbar? Hat die Menge T lokale Maxima?

Aufgabe 5. Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Zeige: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n + a} - \sqrt{n} = 0$. Trifft folgendes zu: für jedes $Z \in \mathbb{R}$ mit $Z > 0$ existiert ein $Y \in \mathbb{N}$, sodass für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i > Y$ die Ungleichung $|\sqrt{i + a} - \sqrt{i}| < Z$ gilt? Trifft folgendes zu: für jedes $Z \in \mathbb{R}$ mit $Z > 0$ existiert ein $Y \in \mathbb{N}$ sodass für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i > Y$ die Ungleichung $|\sqrt{i + a} - \sqrt{i}| < Z$ gilt?

Aufgabe 6. Für $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, sei $f(x) = \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$. Für $x \geq 1$ gilt $f(x) \geq 1$. Zeige für $x, y, h \in \mathbb{R}, x, y \geq 1, h \geq 0$, die Ungleichungen:

$$\sqrt{1 + x + h} - \sqrt{1 + x} \leq h/2,$$

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{3}{4}|y - x|$$

Schliesse, dass die Gleichung $\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = x$ höchtens eine Lösung $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$, hat. In den 3 folgenden Aufgaben werden wir eine Lösung dieser Gleichung konstruieren.

Aufgabe 7. (Fortsetzung). Wir defieren rekurziv eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $a_0 = 37$ und für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $a_{n+1} = f(a_n)$. Sei $L = |37 - f(37)|$. Zeige für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die Ungleichungen $|a_{n-1} - a_n| \leq (\frac{3}{4})^{n-1}L$ und $|37 - a_n| \leq (1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-1})L \leq 4L$. Schliesse, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Aufgabe 8. (Fortsetzung). Sei $b_n = \text{Supremum}(\{a_m \mid m \geq n\}$. Zeige, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monotone fallend ist. Schliesse, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent ist. Sei $B = \lim_{n\to\infty} b_n$. Bemerke $B \geq 1$.

Aufgabe 9. (Fortsetzung). Wir möchten zeigen, dass $B = f(B)$ gilt. Dazu zeige für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, dass gilt $|B - f(B)| \leq \frac{11}{4}\epsilon$. Hinweis: wähle (natürlich mit Begründung der Existenz einer solchen Wahl) $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $(\frac{3}{4})^N L \leq \epsilon$ und $B \leq b_N \leq B + \epsilon$ gelten. Dann schliesse mit $|B - f(B)| \leq |B - b_N| + |b_N - b_{N+1}| + |b_{N+1} - f(B)|$, $|b_N - b_{N+1}| \leq (\frac{3}{4})^N L \leq \epsilon$ und $|y_{N+1} - f(B)| = |f(b_N) - f(B)| \leq \frac{3}{4}|B - b_N| \leq \frac{3}{4}\epsilon$.

Aufgabe 10. Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Ein $h \in \mathbb{R}$ heisst Häufungspunkt der Folge a, wenn für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid |h - a_k| < \epsilon\}$ unendlich viele Elemente hat. Zum Beispiel, $0 \in \mathbb{R}$ ist der einzige Häufungspunkt der Folge $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Konstruiere eine Folge in $\mathbb{R}$, die keine Häufungspunkte hat. Konstruiere eine Folge in $\mathbb{R}$, wofür jedes Element in $\mathbb{R}$ Häufungspunkt ist.

Aufgabe 11. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Für $k \in \mathbb{N}$, sei $m_k := \text{Infimum}\{a_n \mid n \geq k\}$ und $M_k := \text{Supremum}\{a_n \mid n \geq k\}$. Zeige, dass die Folgen $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren. Zeige, dass $\lim_{k\to\infty} m_k$ der kleinste und dass $\lim_{k\to\infty} M_k$ der grösste Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nur dann konvergent, wenn $\lim_{k\to\infty} m_k = \lim_{k\to\infty} M_k$ gilt.

Aufgabe 12. Sei $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \notin \mathbb{Q}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := n\alpha - [n\alpha]$. Zeige, dass die Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ injektiv ist. Zeige, dass es für jedes $L \in [0,1]$ eine streng wachsende Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_{\phi(n)} = L$ gibt. Hinweis für den Fall $L = 1$: Wir definieren rekurziv eine streng wachsende Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wir setzen $\phi(0) = 0$ und für $n \in \mathbb{N}$, zeigen wir die Existenz von ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \phi(n)$ und mit $a_k > a_{\phi(n)}$ und wir setzen $\phi(n+1) = \text{Minimum}\{k \in \mathbb{N} \mid k > \phi(n), a_k > a_{\phi(n)}\}$. Wir zeigen nun $\lim_{n\to\infty} a_{\phi(n)} = L$.

Aufgabe 12. Sei A eine Teilmenge in $\mathbb{R}$. Sei D_A die Teilmenge $\{|x - y| \mid x \in A, y \in A\} \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass die Teilmenge A genau dann beschränkt ist, wenn die Teilmenge D_A beschränkt ist. Für eine Beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ definieren wir $\delta(A) := \text{Supremum}(D_A) \in \mathbb{R}$ als *Durchmesser* der Teilmenge A. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge. Zeige, dass die Folge $n \in \mathbb{N} \mapsto \delta(\{a_k \mid k \geq n\})$ eine konvergente Folge mit 0 als Grenzwert ist. Eine *Cauchy Folge* in $\mathbb{R}$ ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, derart, dass die Folge $n \in \mathbb{N} \mapsto \delta(\{a_k \mid k \geq n\})$ eine konvergente Folge mit 0 als Grenzwert ist. Augustin-Louis Cauchy, geb: 21 Aug 1789 in Paris, verst.: 23 May 1857 in Sceaux, bei Paris, hat die Mathematik geprägt, siehe seine *Oeuvres complètes*, Gauthier-Villars, 1882-1970 in 27 Bände.

Aufgabe 13. Man beweise den Satz: Eine Cauchy Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{R}$ konvergent. Hinweis: Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Benütze Aufgabe 11.