Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini I

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge. Konstruiere in A eine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge $n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in A$ mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \text{Supremum}(A)$$

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in \mathbb{R}$ eine Folge mit $a_n \geq n, n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Folge a in $\mathbb{R}$ nicht konvergent ist. Sei $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv. Zeige, dass die Folge $a \circ \phi$ in $\mathbb{R}$ nicht konvergent ist.

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in \mathbb{R}$ eine Folge und sei $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv. Wir nehmen an, dass die Folge $a \circ \phi$ in $\mathbb{R}$ konvergent ist. Ist unter diesen Voraussetzungen die Folge a notgedrungen in $\mathbb{R}$ konvergent? Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{\phi(n)}$ gilt, wenn die Folge a in $\mathbb{R}$ konvergent ist.

Aufgabe 4. Ist die Folge $n \in \mathbb{N} \mapsto a_n := n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}]$ beschränkt? Konvergent in $\mathbb{R}$? Für $x \in \mathbb{R}$ ist mit $[x]$ die grösste ganze Zahl k mit $k \leq x$ bezeichnet. Hinweis: Zeige, dass in der Dezimalentwicklung von $\sqrt{2}$ zwei Ziffern i und j mit $i \neq j$ unendlich oft vorkommen.

Aufgabe 5. Zeige für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $n(n+1) \leq 2^n$. Zeige, dass die Folge $n \in \mathbb{N} \mapsto \frac{n}{2^n} \in \mathbb{R}$ konvergent mit Grenzwert 0 ist.

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Steigung mit $|f(u+v) - f(u) - f(v)| \leq$ $u, v \in \mathbb{Z}$ für ein $S \in \mathbb{N}$. Sei $F \in \mathbb{R}$ durch f repräsentiert. Für $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$, ist $f(m)/m$ eine reelle Zahl, die durch die Steigung $n \in \mathbb{Z} \mapsto [nf(m)/m] \in \mathbb{Z}$ repräsentiert ist. Für jedes $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$, ist F auch durch die Steigung $n \in Z \mapsto [f(mn)/m] \in \mathbb{Z}$ repräsentiert. Zeige für $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, m \neq 0$, die Ungleichungen

$$-3 - [Sn/m] \leq [nf(m)/m] - [f(nm)/m] \leq 3 + [Sn/m]$$

Da die Steigung $n \in \mathbb{Z} \mapsto [Sn/m] \in \mathbb{Z}$ die Zahl $S/m \in \mathbb{R}$ repräsentiert, schliesse für $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$, die Ungleichungen

$$-S/m \leq f(m)/m - F \leq S/m$$

Zeige nun, dass die Folge $m \in \mathbb{N}_{>0} \mapsto f(m)/m \in \mathbb{R}$ konvergent mit Grenzwert F ist.