Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini I

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Zeige mit vollständiger Induktion die *Binomial-Formel*

$$(x+y)^n = \sum_{0\leq i\leq n} C_i^n x^i y^{n-i},$$

wobei C_i^n die Anzahl i-elementiger Teilmengen in einer n-elementigen Menge ist. Hinweis: Für $i \geq 1$, zeige: $C_i^n = C_i^{n-1} + C_{i-1}^{n-1}$. Berechne unter Annahme der Binomial-Formel mit Exponent $n-1$ die n^{te} Potenz $(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1}$.

Aufgabe 2. Für $n \in \mathbb{N}, n > 0$, und $x, a \in \mathbb{R}$ zeige:

$$|(x+a)^n - x^n| \leq (n-1)|a|(|x| + |a|)^{n-1}.$$

Für $n \in \mathbb{N}, n > 0$, und $x, a \in \mathbb{R}, xa > 0$, zeige:

$$|(x+a)^n - x^n| \geq (n-1)|a|(|x|)^{n-1}.$$

Aufgabe 3. Für $N \in \mathbb{N}, N > 0$, sei $w_N :=$ Maximum$\{\frac{s}{N} \mid s \in \mathbb{N}, (s/N)^{37} < 37\}$. Zeige: Supremum$\{w_N \mid N \in \mathbb{N}, N > 0\}$ ist eine reelle Zahl. Setze $w :=$ Supremum$\{w_N \mid N \in \mathbb{N}, N > 0\}$. Zeige: $w^{37} \leq 37$. Zeige: $w =$ Infimum$\{w_N + \frac{1}{N} \mid N \in \mathbb{N}, N > 0\}$. Zeige: $w^{37} \geq 37$. Schliesse: $w^{37} = 37$.

Aufgabe 4. Für $x \in \mathbb{R}$, sei $p(x) := x^{11} - x^{13} + x^{17} + x^{19} - 1$. Für $N \in \mathbb{N}, N > 0$, fest, für $y \in \mathbb{R}, -1 \leq y \leq 1$, zeige, dass ein $h \in \mathbb{N}, h \leq N$, mit

$$0 \leq y - p(h/N) \leq 56/N((N+1)/N)^{19}$$

existiert.

Aufgabe 5. Für $y \in \mathbb{R}, -1 \leq y \leq 1$, und $N \in \mathbb{N}, N > 0$, sei $h_N \in \mathbb{N}, h_N \leq N$, mit

$$0 \leq y - p(h_N/N) \leq 56/N((N+1)/N)^{19}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n :=$ Supremum$\{h_N/N \mid N > n\}$ und sei $t :=$ Infimum$\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeige $t \in \mathbb{R}, -1 \leq t \leq 1$, und $p(t) = y$.

Aufgabe 6. Berechne

$$\text{Minimum}\{|p(s/1000000000000000000)| \mid s \in \mathbb{Z}, |s| \leq 1000000000000000000\}.$$

Aufgabe 7. **Aufgabe 5**. Berechne Infimum$\{\sqrt{n^2 + n + 1000000000000000000} - n \mid n \in \mathbb{N}\}$.