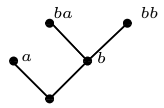
Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini I

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Ein Spalierbaum ist eine endliche Menge B von Wörtern in den Buchstaben "a" und "b", so dass das leere Wort $[]$ Element in B ist und für jedes nichtleere Wort $w = [x_1, x_2, \cdots, x_k]$, $x_i = a$ oder $b, 1 \leq i \leq k, k \in \mathbb{N}, k > 0$, in B die drei Wörter $[x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}], [x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, a], [x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, b]$ Elemente in B sind. Zum Beispiel $B = \{[], [a], [b], [b, a], [b, b]\}$ kann man mit dem Baum



darstellen. Sind A und B Spalierbäume, zeige, dass $A \cap B$ und $A \cup B$ Spalierbäume sind.

Aufgabe 2. Sei B ein Spalierbaum. Ein Wort $w \in B$ heisst maximal in B, wenn $w * a \notin B$ zutrifft. Hier haben wir für ein Wort $w = [x_1, x_2, \cdots, x_k]$ das Wort $[x_1, x_2, \cdots, x_k, a]$ mit $w * a$ bezeichnet. Zeige $(\#B + 1) : 2 = \#\{w \in B \mid w \text{ maximal in } B\}$. Wir ordnen die maximalen Wörter in B lexikographisch an und bezeichnen mit $B_i, 1 \leq i \leq (\#B + 1) : 2$, das i^{te} maximale Wort in B.

Aufgabe 3. Seien u, U Spalierbäume mit $u \subset U$. Sei w maximal in u. Der Ast von U mit Anfang w ist die Menge A aller Wörter W in Buchstaben"a" und "b" derart, dass $w * W$ Element in U ist. Ist w das i^{te} maximale Wort in u, dann nennen wir den Ast von U mit Anfang w den i^{ten} Ast der Inklusion $u \subset U$.

Aufgabe 4. Sei P die Menge aller Paare (u, v) von Spalierbäumen mit $\#u = \#v$. Wir definieren auf P eine Äquivalenzrelation R wie folgt: Für Paare $p = (u, v), q = (t, s)$ mit $p, q \in P$ gilt $(p, q) \in R$, wenn ein $(U, V) \in P$ existiert derart, dass die Inklusionen $u \subset U, t \subset U, v \subset V, s \subset V$ zutreffen und weiter für $1 \leq i \leq (\#u + 1) : 2$ der i^{te} Ast der Inklusion $u \subset U$ mit dem i^{ten} Ast der Inklusion $v \subset V$ übereinstimmt, so wie auch für $1 \leq j \leq (\#t + 1) : 2$ jeweils der j^{te} Ast der Inklusion $t \subset U$ mit dem j^{ten} Ast der Inklusion $s \subset V$ übereinstimmt. Zeige, dass R eine Äquivalenzrelation auf P ist.

Aufgabe 5. Sei $G := P/R$ die Menge der Äquivalenzklassen für die Relation R auf P. Wir definieren eine Verknüpfung $. : G \times G \to G$ wie folgt: für $x, y \in G$ wähle Repräsentanten $p = (u, v) \in x$ und $q = (t, s) \in y$. Zeige, dass man die Repräsentanten $p = (u, v), q = (t, s)$ so wählen kann, dass $v = t$ zutrifft. Definiere $x.y$ als die Äquivalenzklasse von (u, s), nachdem die Repräsentanten

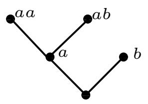
$p = (u, v), q = (t, s)$ mit $u = t$ gewählt worden sind. Zeige, dass dieses Vorgehen eine Verknüpfung auf G definiert.

Aufgabe 6. Zeige, dass G mit der Verknüpfung . eine Gruppe ist. Diese Gruppe wurde 1964 von Richard Thompson entdeckt. Im Jahr 2004 hat das Institut AIM dem 40-ten Jahrestag dieser Entdeckung eine Tagung gewidmet, siehe
`http://www.aimath.org/ARCC/workshops/thompsonsgroup.html`
`http://www.math.unicaen.fr/~godelle/resume_expose.html`.

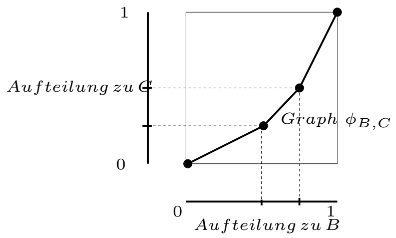
Aufgabe 7. Berechne Minimum$\{|2 - \frac{p^2}{q^2}| \mid p, q \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq 37\}$.

Aufgabe 8. Konstruiere eine reelle Zahl x mit $x^3 = 3$.

Aufgabe 9. (Fortsetzung mit Spalierbäume). Sei I das Intervall $I := [0, 1] := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Einen Spalierbaum B kann man interpretieren als eine dyadische Aufteilung des Intervalls I. Zum Beispiel der Baum B liefert die Aufteilung in $(\#B + 1) : 2$ Intervalle $[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}, 1]$ und der folgende Baum:



liefert die Aufteilung $[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]$. Das Paar (B, C) kann man interpretieren als Abbildung $\phi_{B,C} : I \to I$, die das i^{te} Intervall der Aufteilung zu B auf das i^{te} Intervall der Aufteilung zu C abbildet. Die Einschränkung von $\phi_{B,C}$ auf ein Intervall $[x_-, x_+]$ der Aufteilung zu B bildet mit einer Zuordnung der Form $t \mapsto \alpha t + \beta$ das Intervall $[x_-, x_+]$ auf das Intervall $[y_-, y_+]$ gleicher Nummer der Aufteilung zu C ab. Die Konstanten α, β sind so bestimmt, dass x_- nach y_- und x_+ nach y_+ abgebildet werden. Der Graph von $\phi_{B,C}$ ist wie folgt:



Für Paare $p = (u, v), q = (t, s)$ mit $p, q \in P$, zeige, dass $(p, q) \in R$ genau dann zutrifft, wenn die Abbildungen $\phi_{u,v}$ und $\phi_{t,s}$ gleich sind.

Aufgabe 10. Zeige, dass die Verknüpfung . in $G = P/R$ der Zusammensetzung der korrespondierenden Abbildungen entspricht. Siehe weiter den Vortrag von Ken Brown `http://www.math.cornell.edu/~kbrown/slides/thompson.pdf` und die Arbeit von Matthew G. Brin `http://arxiv.org/math.GR/9705205`.