Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/2005

# Übungen zur Vorlesung Infini I

## 13. Aufgabenblatt

**Aufgabe 1**. Seien $V, W$ reelle Vektorräume endlicher Dimension. Sei $V$ ausgestattet mit der Basis $e_1, e_2, \cdots, e_n$ und Koordinatenfunktionen $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Für ein $v \in V$ gilt nun $v = \sum_{i=1}^{i=n} x_i(v)e_i$. Sei $W$ ausgestattet mit der Basis $f_1, f_2, \cdots, f_m$ und Koordinatenfunktionen $y_1, y_2, \cdots, y_m$. Die Maximumsnorm auf $V$ bezüglich der Basis $e_1, e_2, \cdots, e_n$ ist $||v||_{\mathrm{Max},V} := \mathrm{Maximum}\{|x_1(v)|, |x_2(v)|, \cdots, |x_n(v)|\}$. Die Maximumsnorm auf $W$ bezüglich der Basis $f_1, f_2, \cdots, f_m$ ist $||w||_{\mathrm{Max},W} := \mathrm{Maximum}\{|y_1(v)|, |y_2(v)|, \cdots, |y_m(v)|\}$. Sei $A : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $M_A := \mathrm{Maximum}_{j=1,2,\cdots,m} \sum_{i=1}^{i=n} |y_j(A(e_i))|$. Zeige, dass $M_A$ die Operatornorm

$$||A||_{\mathrm{Operator}} := \mathrm{Supremum}\{||A(h)||_{\mathrm{Max},W} \mid h \in V, ||h||_{\mathrm{Max},V} \leq 1\}$$

gleich $M_A$ ist.

**Aufgabe 2**. (Fortsetzung). Ein $\pm 1$ Vektor in $V$ ist ein Vektor $v$ mit $x_i(v) = \pm 1, i = 1, 2, \cdots, n$. Zeige, dass in $V$ ein $\pm 1$ Vektor $h$ mit $||A||_{\mathrm{Operator}} = ||A(h)||_{\mathrm{Max},W}$ existiert.

**Aufgabe 3**. Sei $f : V \to W$ eine Abbildung. Sei $p \in V$. Sei $f$ an der Stelle $p$ differenzierbar und sei $f(p+h) = f(p)+A(h)+\mathrm{Rest}_p(h)$ die Dreigliedentwicklung. Zeige, dass $f$ an der Stelle $p$ stetig ist. Hinweis: Für $q \in V$ setze $h = q-p$. Schätze wie folgt ab.

$$||f(q) - f(p)||_{\mathrm{Max},W} = ||f(p + h) - f(p)||_{\mathrm{Max},W} \leq$$
$$||A(h)||_{\mathrm{Max},W} + ||\mathrm{Rest}_p(h)||_{\mathrm{Max},W}$$

Es existiert ein $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, derart so, dass für alle $h \in V$ mit $||h||_{\mathrm{Max},V} \leq \delta$ die Abschätzung

$$||A(h)||_{\mathrm{Max},W} + ||\mathrm{Rest}_p(h)||_{\mathrm{Max},W} \leq (||A||_{\mathrm{Operator}} + 1)||h||_{\mathrm{Max},V}$$

gilt.

**Aufgabe 4**. (Fortsetzung). Sei $f : V \to W$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass $f$ stetig ist.

**Aufgabe 5**. (Fortsetzung). Sei $||v||_\Sigma$ auf $V$ die Norm $||v||_\Sigma := \sum_{i=1}^{i=n} |x_i(v)|$. Zeige, dass die Abbildung $v \in V \mapsto ||v||_\Sigma \in \mathbb{R}$ stetig ist. Bestimme die Stellen $p \in V$ an welcher die Abbildung $v \in V \mapsto ||v||_\Sigma \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

**Aufgabe 6**. Zeichne für $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear und $p \in \mathbb{R}^2$ die Kurven $t \in [-4, 4] \mapsto \exp(tA)(p) \in \mathbb{R}^2$. Dazu betrachte für $p$ alle $\pm 1$ Vektoren und die Vektoren $\pm e_1, \pm e_2$. Für $A$ betrachte viele Beispiele. Gäbe den Parameter $t$ in Farbe wieder.