Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini I

11. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $t, h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ zeige:

$$|(t+h)^n - t^n - nt^{n-1}h| \leq h^2(|t|+1)^n$$

Hat die Funktion $t \in \mathbb{R} \mapsto t^n \in \mathbb{R}$ an jeder Stelle eine Dreigliedentwicklung?

Aufgabe 2. Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + t^2/2 + t^3/6 + t^4/24 + \cdots$$

Für $t \in \mathbb{R}$ fest und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > [2|t|] + 1$ zeige:

$$|\frac{t^n}{n!}| \leq \frac{|2t|^{[2|t|]+1}}{2^{-n}}$$

Schliesse, dass die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n!}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Aufgabe 3. Wir definieren die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\exp(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{t^n}{n!}$$

Für $N \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}, |h| \leq 1$, zeige:

$$|\sum_{n=0}^{n=N} \frac{(t+h)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{n=N} \frac{t^n}{n!} - h \sum_{n=0}^{n=N-1} \frac{t^n}{n!}| \leq h^2 \sum_{n=0}^{n=N} \frac{(|t|+1)^n}{n!}$$

Schliesse für $t \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}, |h| \leq 1$,

$$|\exp(t+h) - \exp(t) - h\exp(t)| \leq h^2 \exp(|t|+1)$$

Zeige, dass die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Aufgabe 4. Wir schreiben die Dreigliedentwicklung der Exponentialfunktion an der Stelle $p \in \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\exp(p+h) = \exp(p) + h\exp(p) + \mathrm{Rest}_p(h)$$

Leite für die Funktion $p \in \mathbb{R} \mapsto S(p) := \exp(p)\exp(-p) \in \mathbb{R}$ folgende Dreigliedentwicklung an der Stelle $p \in \mathbb{R}$ her:

$$S(p+h) = S(p) + 0 + \text{Fehler}(h)$$

wobei

$$\text{Fehler}(h) =$$

$$\exp(p)\text{Rest}_{-p}(-h) + \exp(-p)\text{Rest}_p(h) - h^2 S(p) + \text{Rest}_p(h)\text{Rest}_{-p}(-h)$$

ist. Hinweis: Berechne $S(p+h)$ als das Produkt der Dreigliedentwicklungen von der Exponentialfunktion an den Stellen p und $-p$. Es muss dabei nachgewiesen werden, dass $\text{Fehler}(h)$ relativ klein bezüglich h ist.

Aufgabe 5. Zeige für $t \in \mathbb{R}$ die Identität: $\exp(t)\exp(-t) = 1$. Hinweis: die Hilfsfunktion S der Aufgabe 4 ist konstant.

Aufgabe 6. Zeige für $t \in \mathbb{R}$ die Ungleichung: $\exp(t) > 0$. Hinweis: $\exp(0) = 1$ und aus $\exp(t)\exp(-t) = 1$ folgt, dass $\exp(t) \neq 0$ gilt.

Aufgabe 7. Für $s \in \mathbb{R}$ fest leite eine Dreigliedentwicklung der Funktion $t \in \mathbb{R} \mapsto S(t) := \exp(s+t)\exp(-t) \in \mathbb{R}$ her. Zeige für $t, s \in \mathbb{R}$ die Identität: $\exp(s+t) = \exp(s)\exp(t)$.

Aufgabe 8. Wir definieren die reelle Zahl e mit $e := \exp(1)$. Zeige die Ungleichungen $2 < e < 3$. Für $t \in \mathbb{Q}$ zeige $e^t = \exp(t)$. Für $t \in \mathbb{R}$ definiere e^t und zeige $e^t = \exp(t)$. Hinweis: Zum Beispiel definiere $e^t = \text{Supremum}\{e^r \mid r \in \mathbb{Q}\}$.

Aufgabe 9. Erweitere die Exponentialfunktion zu $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit dem Ansatz $\exp(z) := \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^n}{n!}$. Kontrolliere, dass die Ergebnisse der Aufgaben $1, 2, 3, 4, 5$ für die komplexe Exponentialfunktion gelten. Bei Aufgabe 5 betrachte die Hilfsfunktion $t \in [0,1] \mapsto S(tz)S(-tz) \in \mathbb{C}$. Zeige, dass Real- und Imaginärteil von $S(tz)S(-tz)$ unabhängig von t sind.

Aufgabe 10. Sei $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$. Zeige für $t \in \mathbb{R}$ die Identitäten:

$$1 = \exp(it)\exp(-it) = |\exp(it)|^2 = |\exp(it)|$$

Aufgabe 11. Für $t \in \mathbb{R}$ definiere $\cos(t) := \mathbf{Re}(\exp(it)) = \frac{\exp(it)+\exp(-it)}{2}$ und $\sin(t) := \mathbf{Im}(\exp(it)) = \frac{\exp(it)-\exp(-it)}{2i}$. Zeige, dass die Funktionen $t \in \mathbf{R} \mapsto \cos(t) \in \mathbf{R}$ und $t \in \mathbf{R} \mapsto \sin(t) \in \mathbf{R}$ differenzierbar sind. Zeige die Identität $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$. Berechne die Ableitung der Funktionen sin und cos.

Aufgabe 12. Zeige $\sin(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Zeige $\sin(3) > 0$ und $\sin(4) < 0$. Zeige, dass die Menge $P := \{t \in \mathbf{R} \mid t > 0, \sin(t) = 0\}$ nichtleer ist. Sei $\pi := \text{Infimum}(P)$. Zeige $\sin(\pi) = 0$. Zeige $3 < \pi < 4$. Zeige $e^{\pi i} + 1 = 0$.