Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini I

11. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen auf $A \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass die Funktionen $f + g$ und fg stetig sind.

Aufgabe 2. Sei x die Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x(p) = p$ für $p \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Funktion $x^3 - 2x + 1$ stetig ist. Zeige, dass eine polynomiale Funktion auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine polynomiale Funktion vom ungeraden Grad. Zum Beispiel $f(p) = x(p)^5 - x(p) + 1, p \in \mathbb{R}$. Zeige, dass ein $M \in \mathbb{R}, M > 0$, existiert derart, dass $f(M)f(-M) < 0$ gilt. Zeige, dass f in $[-M, M]$ eine Nullstelle hat.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe polynomiale Funktion mit $-f(p) = f(-p)$ und $f(1) = 1$. Bestimme f.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine polynomiale Funktion. Berechne $\lim_{n \in \mathbb{N}, n \to \infty} f(n^2)/(1 + f(n)^2)$.

Aufgabe 6. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Sei $w \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < w < f(b)$. Wir definieren wie folgt rekurziv eine Folge $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Paaren von reellen Zahlen. Es gilt $(a_0, b_0) = (a, b)$. Weiter gilt $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (\frac{a_n + b_n}{2}, b_n)$ falls $f(\frac{a_n + b_n}{2}) \leq w$ und $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, \frac{a_n + b_n}{2})$ falls $f(\frac{a_n + b_n}{2}) > w$ ist. Zeige, dass die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit gemeinsamen Grenzwert $L \in \mathbb{R}$ konvergieren und dass $f(L) = w$ gilt.

Aufgabe 7. Bestimme in 20 Programmschritte bis auf 6 Dezimalstellen eine Nullstelle in $[0, 1]$ der Funktion $x^{37} + x^{31} + x^{29} + x^{23} + x^{19} + x^{17} + x^{13} + x^{11} + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 - 11$, wobei pro Programmschritt ein Wert der Funktion berechnet wird.

Aufgabe 8. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Zeige, dass die Funktion $f \circ g$ stetig ist.

Aufgabe 9. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmen. Zeige: $f = g$.

Aufgabe 10. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass für jedes Segment $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$, das Bild $f([a, b])$ ein Segment ist. Kann man schliessen, dass die Funktion f stetig ist?