Prof. N. A'Campo Sommersemester 2001

Übungen zur Vorlesung Infini II, 9. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien $f(x) := 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x$ und $g(y) := 2048y^{12} - 6144y^{10} + 6912y^8 - 3584y^6 + 840y^4 - 72y^2 + 1$. Zeige, dass die implizit definierte Kurve $K := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid f(x(p)) - g(y(p)) = 0\}$ genau 55 Selbstüberkreuzungen hat. Hinweis: f ist das 11-te Chebychevsche Polynom und g das 12-te. Pafnouti Lvovitch Tchebychiov, geboren den 16. Mai 1821 in Okatovo, in Kalouga, verstorben den 8. Dezember 1894 in St. Petersburg, hat der Académie des Sciences in Paris im Jahr 1874 über die sogenannten Chebychev Polynome eine Mitteilung gemacht.

Aufgabe 2. Zeige, dass lokal eine Selbstüberkreuzung der Kurve K in geeigneten differenzierbaren lokalen Koordinaten u, v auf einer offenen Teilmenge U in $\mathbb{R}^2$ durch $K \cap U = \{p \in U \mid u(p)v(p) = 0\}$ gegeben ist.

Aufgabe 3. Sei d eine der 55 Selbstüberkreuzungen der Kurve K. Konstruiere ein Polynom $\sigma_d(x, y)$ der Form $\sigma_d(x, y) = a(x)b(y)$ vom Grad 19, sodass die Kurve $K' := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid f(x(p)) - g(y(p)) - \sigma_d(x(p), y(p)) = 0\}$ in der unmittelbaren Nähe der 54 verbliebenen Selbstüberkreuzungen der Kurve K eine Selbstüberkreuzung hat und dass die Selbstüberkreuzung d sich glättet, sowie $\{p \in U \mid u(p)v(p) = t\}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0$, die Selbstüberkreuzung $\{p \in U \mid u(p)v(p) = 0\}$ glättet.

Aufgabe 4. Zeige, dass man die Störung der Aufgabe 3 auch mit einem Polynom $\sigma_d(x, y)$ vom Grad 14 erreichen kann.

Aufgabe 5. Illustriere die Ergebnisse mit MAPLE und SURF.

Aufgabe 6. Zeige, dass ein Polynom $f(x) := x^3 + ax^2 + bx + c$ genau dann drei verschiedene Nullstellen in $\mathbb{R}$ hat, wenn $3x^2 + 2ax + b$ zwei Nullstellen $u, v \in \mathbb{R}$ hat und $f(u)f(v) < 0$ ist. Also hat $f(x)$ genau dann drei verschiedene Nullstellen in $\mathbb{R}$, wenn $a^2 - 3\,b > 0$ und $27\,c^2 - 18\,abc - a^2b^2 + 4\,a^3c + 4\,b^3 < 0$ gelten.

Aufgabe 7. Man ziehe aus der Menge $\{-20, -19, -18, \cdots, 18, 19, 20\}$ in dreimal mit "Zurücklegen" die Zahlen a, b, c. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat nun das Polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$ drei verschiedenen Nullstellen in $\mathbb{R}$?

Aufgabe 8. Frage wie vorher, aber nun für das Polynom $8x^3 + 4ax^2 + 2bx + c$?

Abgabe der Aufgaben bis Donnerstag, den 27. Juni 2001.