Prof. N. A'Campo Sommersemester 2001

Übungen zur Vorlesung Infini II, 8. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und sei $k \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke für $|f''(x)|, x \in [0,1]$. Sei $\mathrm{KW}_f \subset \mathbb{R}$ die Menge der kritischen Werten von f. Zeige, dass für $N \in \mathbb{N}, N > 0$, die Existenz von N Intervallen $J_1, J_2, \cdots, J_N$, in $\mathbb{R}$, die KW_f überdecken und deren Gesamtlänge $\frac{k}{2N}$ nicht übersteigt. Hinweis: die Länge von $f([\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]), 0 \leq i < N$, übersteigt $\frac{k}{2N^2}$ nicht, falls f' in $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}]$ eine Nullstelle hat.

Aufgabe 2. Ein Beispiel einer Cantorsche Teilmenge, genannt nach Georg Cantor dänischer Herkunft, geboren Petersburg 3. März 1845, verstorben 6. Januar 1918 Halle, in $[0,1]$ ist die Menge $K \subset [0,1]$ aller Summen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\{0,2\}$ ist. Zeige, dass K eine Nullmenge im Sinne von Camille Jordan, geboren Lyon 5. Januar 1845, verstorben 21. Januar 1922 Paris, ist.

Aufgabe 3. Zeige, dass es keine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{KW}_f = K$ geben kann.

Aufgabe 4. Zeige, dass es eine stetig differenzierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{KW}_f = K$ gibt.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Zeige die Existenz einer Jordansche Nullmenge J in $\mathbb{R}$, sodass die Summe $S_w(f) := \sum_{x\in\mathbb{R}, f(x)=w} \frac{f'(x)}{|f'(x)|}$ für $w \in \mathbb{R} \setminus J$ eine endliche Summe ist. Zeige, dass $S_w(f)$ unabhängig von $w \in \mathbb{R} \setminus J$ ist. Eine Teilmenge $J \subset \mathbb{R}$ heisst Jordansche Nullmenge, wenn für jedes Intervall $I = [a,b], a < b$, der Durchschnitt $I \cap J$ eine Jordansche Nullmenge in $[a,b]$ ist.

Aufgabe 6. Beschreibe in Abhängigkeit von $w \in \mathbb{R}$ die Teilmengen $N_w := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x(p))\sin(y(p)) = w\} \subset \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 7. Beschreibe in Abhängigkeit von $w \in \mathbb{R}$ die Teilmengen $N_w := \{p \in S^2 \mid x(p)^2 + y(p)^2 - z(p)^2 = w\} \subset S^2$, wobei $S^2 := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2 = 1\}$ ist.

Aufgabe 8. Beschreibe in Abhängigkeit von $w \in \mathbb{R}$ die Teilmengen $N_w := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid x(p)^3 - x(p)^2 + y(p)^3 - y(p)^2 + z(p)^3 - z(p)^2 = w\}$.

Abgabe der Aufgaben bis Donnerstag, den 20. Juni 2001.