Prof. N. A'Campo Sommersemester 2001

Übungen zur Vorlesung Infini II, 7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $S : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^*$ eine lineare Abbildung. Sei ω^S auf $\mathbb{R}^2$ die 1-Differentialform $\omega^S_p(h) := (S(p))(h), p \in \mathbb{R}^2, h \in \mathbb{R}^2$. Für $r \in \mathbb{R}$ sei $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ der Weg $t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t)$. Berechne das Wegintegral $\int_{\gamma_r} \omega^S$.

Aufgabe 2. Sei $\omega = Adx + Bdy$ eine differenzierbare $1-$Differentialform auf $\mathbb{R}^2$. Für $p \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}$ sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ der Weg $\gamma(t) = p + (r\cos(t), r\sin(t))$ und $I_{p,r}(\omega)$ das Wegintegral $\int_\gamma \omega$. Zeige, dass, wobei e_1, e_2 die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bilden, gilt:

$$\lim_{r\to 0, r>0} \frac{1}{r^2} I_{p,r}(\omega) = \pi(d\omega)_p(e_1, e_2)$$

Aufgabe 3. Sei $\omega = Adx + Bdy$ eine differenzierbare $1-$Differentialform auf $\mathbb{R}^2$. Wir nehmen an, dass für $p \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt: $I_{p,r}(\omega) = 0$. Zeige, dass $d\omega = 0$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $\omega = Adx + Bdy$ eine stetige 1-Differentialform auf $\mathbb{R}^2$. Wir nehmen an, dass für $p \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}, r > 0$, gilt: $I_{p,r}(\omega) = 0$. Zeige, dass eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $df = \omega$ existiert. Schliesse, dass $d\omega = 0$ gilt, wobei $d\omega$ wie in der Vorlesung definiert ist. Hinweis: Konstruiere eine Familie von 2-mal differenzierbaren 1-Formen $(\omega^t)_{t\in]0,1]}$ auf $\mathbb{R}^2$ mit $\lim_{t\to 0} \omega^t = \omega$ und $I_{p,r}(\omega^t) = 0$. Folglich, siehe Aufgabe 3, gilt: $d\omega^t = 0$. Für die Konstruktion siehe die hier folgenden Aufgaben.

Aufgabe 5. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $\phi(x) = 0$ für $x \notin [-1, 1]$ und $\phi(x) = (x^2 - 1)^4$ für $x \in [-1, 1]$. Wie oft ist die Funktion ϕ differenziebar? Wähle $a \in \mathbb{R}$, so dass $\int_\infty^\infty a\phi(x)dx = 1$ gilt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Für $t \in]0, 1]$ sei $f^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f^t(x) := \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t}\phi(y/t)f(x - y)dy$. Zeige, dass die Familie $(f^t)_{t\in]0,1]}$ eine Familie von 3-mal differenzierbaren Funktionen ist. Zeige, dass für $R \in \mathbb{R}, R > 0$, gilt: $\lim_{t\to 0} \max_{|x|\le R} |f^t(x) - f(x)| = 0$.

Aufgabe 6. Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $\psi(p) = a\phi(x(p))\psi(y(p))$, wobei $a \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi(x, y)dxdy = 1$ gilt. Für $t \in]0, 1], p \in \mathbb{R}^2$, sei $\psi^t(p) = 1/t^2\psi(\frac{1}{t}p)$. Sei $\omega = Adx + Bdy$ die 1-Form der Aufgabe 4. Setze $\omega^t := A^t dx + B^t dy$. Zeige, dass die Familie $(\omega^t)_{t\in]0,1]}$ dem Hinweis der Aufgabe 4 genügt.

Aufgabe 7. Für $t \in]0, 1]$ sei $f^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Stammfunktion mit $f^t(0) = 0$ für ω^t. Definiere für $p \in \mathbb{R}^2$ den Funktionswert $f(p) := \lim_{t\to 0} f^t(p)$. Zeige, dass die Funktion stetig differenzierbar ist, und dass $df = \omega$ gilt. Hinweis: leite aus den Dreigliedentwickelungen für f^t eine Dreigliedentwickelung für f her.

Abgabe der Aufgaben bis Donnerstag, den 13. Juni 2001.