Prof. N. A'Campo Sommersemester 2001

Übungen zur Vorlesung Infini II, 6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, n > 0$, sei Flach($U$) der Raum aller differenzierbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ mit $df = 0$. Zeige, dass Flach(U) ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 2. Konstruiere für $d \in \mathbb{N}$ eine offene Teilmenge U in $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, n > 0$, mit $\dim(\text{Flach}(U)) = d$.

Aufgabe 3. Sei U eine Teilmenge in $\mathbb{R}^n$. Zwei Punkte $p, q \in U$ heissen wegverbunden in U wenn eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$ existiert. Die Teilmenge U heisst wegzusammenhängend, wenn jedes Paar von Punkten aus U in U wegverbunden ist. Zeige, dass für eine nichtleere, offene Teilmenge U in $\mathbb{R}^n$ die Eigenschaften $\dim(\text{Flach}(U)) = 1$ und "U wegzusammenhängend" äquivalent sind.

Aufgabe 4. Zeige, dass $\dim(\text{Flach}(U))$ nicht unendlich und abzählbar sein kann.

Aufgabe 5. Sei ω auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine stetige 1-Form mit $d\omega = 0$. Wir nehmen an, dass ein $r > 0$ und eine differenzierbare Funktion auf $U_r := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x(p)^2 + y(p)^2 < r^2\}$ existieren, so dass für $p \in U_r$ gilt: $(df)_p = \omega_p$. Zeige, dass eine differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $dg = \omega$ existiert.

Aufgabe 6. Sei ω auf $U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}, n \neq 2$, eine stetige 1-Form mit $d\omega = 0$. Konstruiere eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $df = \omega$.

Aufgabe 7. Sei auf $U := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die 1-Form ω durch $\omega_z(h) := \Re \frac{h}{iz}, z \in U, h \in \mathbb{C}$, erklärt. Sei $D_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$. Zeige, dass mit $z \in D_1 \mapsto \Im \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n} \in \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion $f : D_1 \to \mathbb{R}$ erklärt ist. Zeige für $p \in D_1$ dass $(df)_p = \omega_p$ gilt.

Aufgabe 8. (Fortsetzung der Aufgabe 7) Zeige dass keine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $df = \omega$ existiert.

Abgabe der Aufgaben bis Donnerstag, den 6. Juni 2001.