Prof. N. A'Campo Sommersemester 2001

Übungen zur Vorlesung Infini II, 5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Zeige, dass die Tangensfunktion $\tan :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus ist. Die Umkehrabbildung zu tan ist die Arcustangensabbildung $\arctan : \mathbb{R} \to]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Leite für $x \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ her $\tan'(\arctan(x)) \arctan'(x) = 1$ und schliesse für $x \in]-1, 1[$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Aufgabe 2. Zeige für $x \in]-1, 1[$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Aufgabe 3. Zeige für $x \in [-1, 1]$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Zeige für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in [-1, 1]$ die Abschätzung:

$$|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}| \leq \frac{1}{2N+3}.$$

Aufgabe 4. Zeige für $x \in [-1, 1]$ die Entwicklung von James Gregory, geb. im November 1638 in Drumoak bei Aberdeen, und Gottfried Wilhelm Leibniz, geb. am 14. November 1646 in Leipzig,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Aufgabe 5. Leite die Reihenentwicklung von G. Leibniz für $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$ her: $\frac{\pi}{4} = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$. Wieviele Terme sind zu addieren, um eine Genauigkeit von 2 Dezimalstellen für π zu erzielen?

Aufgabe 6. Benutze $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ zur Herleitung von $\pi = 2\sqrt{3}(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \cdots$. Wieviele Terme sind zu addieren, um eine Genauigkeit von 100 Dezimalstellen zu erzielen? Wie bei Schuhen ist Eleganz nicht gleich Effizienz.

Aufgabe 7. Finde eine positive polynomiale Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die keine kritischen Punkte hat. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die polynomiale Abbildung $F(x, y) = (f(x, y), f(-y, x))$. Zeige, dass für alle $p \in \mathbb{R}^2$ das Differential $(DF)_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Isomorphismus ist. Ist F ein Diffeomorphismus?

Abgabe der Aufgaben bis Donnerstag, den 10. Mai 2001.