Prof. N. A'Campo Sommersemester 2001

Übungen zur Vorlesung Infini II

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Eine Isometrie ist eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$, so dass für $p, q \in X_1$ gilt: $d_2(f(p), f(q)) = d_1(p, q)$. Zeige, dass eine Isometrie injektiv und stetig ist.

Aufgabe 2. Seien $S, \Sigma \subset \mathbb{R}^2$ die Teilmengen $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \,\textbf{und}\, y \geq 0\}$, $\Sigma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \,\textbf{oder}\, y \geq 0\}$. Wir verwenden auf S wie auf Σ die Euklidische Distanzfunktion von $\mathbb{R}^2$. Existiert eine Isometrie $f : \Sigma \to S$?

Aufgabe 3. Eine Einbettung im Sinne von Lipschitz des metrischen Raumes (X_1, d_1) in den metrischen Raum (X_2, d_2) ist eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$, für die es $a, A \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass für $p, q \in X_1$ gilt:

$$a d_1(p, q) \leq d_2(f(p), f(q)) \leq A d_1(p, q).$$

Zeige, dass eine Lipschitz-Einbettung injektiv und stetig ist.

Aufgabe 4. Konstruiere eine Lipschitz-Einbettung $f : \Sigma \to S$, die surjektiv ist. Ist f^{-1} eine Lipschitz-Einbettung von S in Σ? Identifiziere $z = x + yi \in \mathbb{C}$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ist $z \in S \mapsto \frac{\bar{z}^3}{|z|^2} \in \Sigma$ eine Lipschitz-Einbettung von S auf Σ?

Aufgabe 5. Seien $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^2 \geq 0\}$ und $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^2 \leq 0\}$, beide betrachtet als metrische Unterräume des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^2$. Gibt es eine Lipschitz-Einbettung von L in R? Gibt es eine surjektive Lipschitz-Einbettung von R auf L?

Aufgabe 6. Sei K_ρ der Kreis $K_\rho := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \rho^2\}$. Bilde mittels einer Inversion $K_\rho \cap R$ auf $K_\rho \cap L$ ab. Konstruiere eine Bijektion $f : R \to L$, so dass f und f^{-1} stetig sind. Hinweis: richte f so ein, dass $f(K_\rho) \subset K_\rho$ gilt.

Aufgabe 7. Eine Lipschitz-Abbildung des metrischen Raumes (X_1, d_1) in den metrischen Raum (X_2, d_2) ist eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$, für die $A \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren, so dass für $p, q \in X_1$ gilt: $d_2(f(p), f(q)) \leq A d_1(p, q)$. Zeige, dass eine Lipschitz-Abbildung stetig ist.

Aufgabe 8. Gibt es eine Bijektion $f : R \to L$, derart dass f oder f^{-1} Lipschitz-Abbildung ist?

Aufgabe 9. Sei $f : [a, b] \to [p, q]$ eine differenzierbare Bijektion zwischen Intervallen, derart dass $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und ohne Nullstellen ist. Zeige, dass f eine Lipschitz-Einbettung ist.

Aufgabe 10. Ist $x \in \mathbb{R} \mapsto x + \frac{x^3}{\sqrt{1+x^6}} \in \mathbb{R}$ oder $x \in \mathbb{R} \mapsto x + \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} \in \mathbb{R}$ eine bijektive Lipschitz-Einbettung?

Aufgabe 11. Ist $x \in [-1,1] \mapsto f(x) := x \sin(1/x) \in \mathbb{R}$ oder $x \in [-1,1] \mapsto g(x) := x^2 \sin(1/x) \in \mathbb{R}$ eine Lipschitz-Abbildung? Hier definieren wir $f(0) = g(0) = 0$.

Aufgabe 12. Sie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve. Für eine Unterteilung $u := (a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k = b)$ sei $\gamma_u : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ die stetige Kurve mit $\gamma_u(a_i) = \gamma(a_i), 0 \leq i \leq k$, die auf $[a_{i-1}, a_i], 1 \leq i \leq k$, affin ist. Das Bild der Kurve γ_u ist ein Polygonzug. Die Länge von γ_u ist per Definition die Euklidische Länge des Polygonzuges γ_u. Ist die Menge der Längen der Polygonzüge γ_u nach oben beschränkt, dann heisst die Kurve γ rektifizierbar, und wir definieren dann die Länge Länge$(\gamma) \in \mathbb{R}$ der Kurve γ als Supremum der Längen der Kurven γ_u. Zeige, dass eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, die durch eine Lipschitz-Abbildung gegeben ist, rektifizierbar ist. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 13. Zeige, dass eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ rektifizierbar ist, und dass gilt:

$$\text{Länge}(\gamma) = \int_a^b ||\frac{d}{dt}\gamma(t)||_{Eukl} dt.$$

Berechne die Länge der Kurve $t \in [0, 2\pi] \mapsto (\sin(t), \cos(t)) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 14. Ein Mathematiker reist mit 4 Zylindern aus Kreide im Gepäck. Die Zylinder werden von einem elastischen Band in einem Büschel zusammengehalten, so dass die mittelsenkrechten Ebenen der Zylinder übereinstimmen. Das elastische Band hat es sich bequem gemacht und seine Länge minimiert. Kann man nun bestimmen, wie das Büschel ist?

Aufgabe 15. Zeige, dass eine Lipschitz-Abbildung $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ nicht surjektiv ist. Konstruiere eine stetige surjektive Abbildung $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$. Eine solche Abbildung hat Giuseppe Peano, geb. am 27 August 1858 in Cuneo, konstruiert.

Aufgabe 16. Sei $e := \sum_0^\infty \frac{1}{n!}$. Für $q \in \mathbb{N}, q \geq 1$, zeige, $\sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} < e < \frac{1}{q!} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(q+1)^m} + \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} = \frac{1}{qq!} + \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!}$ und schliesse, dass für ein $Q \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen $Q < q!e < Q+1$ gelten. Somit gilt: $q!e \notin \mathbb{N}$ für $q \in \mathbb{N}, q \geq 1$. Schliesse, dass e keine rationale Zahl ist. Die Irrationalität von e hat Leonard Euler, geb. am 15. April 1707 in Basel, im Jahr 1737 bewiesen.

Aufgabe 17. Sei $\pi := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid t > 0 \,\text{und}\, \sin(t) = 0\}$. Hier ist die Sinusfunktion durch $\sin(t) := \sum_0^\infty (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, t \in \mathbb{R}$, gegeben. Zeige $\pi \neq 0$. Für $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}, q \geq 1$, möchten wir zeigen $\pi \neq \frac{p}{q}$. Darum nehmen wir im Hinblick auf einen Widerspruchsbeweis an $\pi = \frac{p}{q}$. Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ das Polynom $P_n(t) = \frac{t^n(p-qt)^n}{n!}$. Zeige mittels wiederholter partieller Integration für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, dass $\int_0^\pi P_n(t)\sin(t)dt$ eine ganze Zahl ungleich 0 ist. Weiter zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)dt = 0$ gilt! Diesen Beweis der Irrationalität von π hat Johann Heinrich Lambert, geb. am 26. August 1728 in Mülhausen, im Jahr 1761 der Akademie in Berlin vorgelegt.