Übungen zur Vorlesung Infini II, 10. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Wieviel reelle Nullstellen hat das Polynom
$f(x) := x^{32} + 2048\,x^{31} + 2031584\,x^{30} + 1300172800\,x^{29} + 603251671504\,x^{28} +$
$216191776632832\,x^{27} + 62258327833407552\,x^{26} + 14798295167271542784\,x^{25} +$
$2959332681887023127400\,x^{24} + 504995796495905182740480\,x^{23} +$
$74324842356318994356537920\,x^{22} + 9512081152739565458414919680\,x^{21} +$
$1065168480151524838345365541600\,x^{20} +$
$104858301178745771809428152934400\,x^{19} +$
$9105827237900778325547572941986944\,x^{18} +$
$699173295010845788959983267536191488\,x^{17} +$
$47532549181850706495716515354263352980\,x^{16} +$
$2862415392659349750202029386447982317568\,x^{15} +$
$152621268637860191885190547726843938907840\,x^{14} +$
$7195256755680872736175599559029577468059648\,x^{13} +$
$299233084782496254156587295572836220197296672\,x^{12} +$
$10939933278073544082286959378409997596296634368\,x^{11} +$
$349962044296315944174984951980852220547508718720\,x^{10} +$
$9734699072926474595426111528628919533300898283520\,x^{9} +$
$233548119787024244957474939795669412347207194710864\,x^{8} +$
$4781256963719216258949979713478469615800815498731520\,x^{7} +$
$82352286743053537725323865643072716822480943873478016\,x^{6} +$
$1170752758774071598078025347300903761669820682478043136\,x^{5} +$
$13374339946276367553199871772391080903508774043100124480\,x^{4} +$
$118011057105218985460137699151951508210981130777574850560\,x^{3} +$
$754925689748004880758881073232710867223957574665549381376\,x^{2} +$
$3115639236471720826225524068133015056314768750266460110848\,x +$
$62282351133123653095792150817353698251611464756639742033 94?$ Wieviel reelle Nullstellen hat das Polynom $f(x) + 3$?

Aufgabe 2. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig, wenn für jede offene Teilmenge U des Raumes Y das Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ eine offene Teilmenge im Raum X ist. Zeige, dass diese Definition der Stetigkeit äquivalent zu der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit ist, wenn die Räume X und Y metrische Räume sind.

Aufgabe 3. Sei E eine Menge. Zwei Distanzen $d_1, d_2 : E \to \mathbb{R}$ sind topologisch äquivalent, wenn die Topologien der metrischen Räume (E, d_1) und (E, d_2) gleich sind. Zeige, dass Distanzen $d_1, d_2 : E \to \mathbb{R}$ topologisch äquivalent sind, wenn der Ausdruck $\frac{d_1(p,q)}{d_2(p,q)} + \frac{d_2(p,q)}{d_1(p,q)}$ auf $\{(p, q) \in E \times E \mid p \neq q\}$ nach oben beschränkt ist. Gilt die Umkehrung: für topologisch äquivalente Distanzen $d_1, d_2 : E \to \mathbb{R}$ ist der Ausdruck $\frac{d_1(p,q)}{d_2(p,q)} + \frac{d_2(p,q)}{d_1(p,q)}$ nach oben beschränkt?

Aufgabe 4. Sei $E = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen in $[0, 1]$. Wir betrachten auf E die Distanzen $d_1(a, b) := \max\{|a_n - b_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $d_2(a, b) :=$

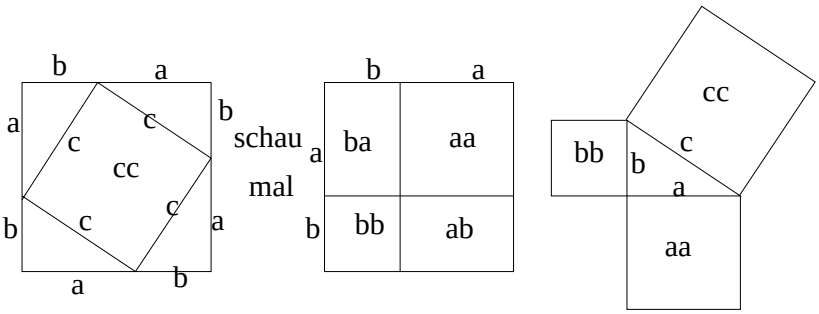
$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}$. Zeige, dass der topologische Raum zu (E, d_2) kompakt ist. Sind die Distanzen d_1 und d_2 topologisch äquivalent? Untersuche die Identitätsabbildungen von (E, d_i) nach (E, d_j) für $i, j \in \{1, 2\}$ auf Stetigkeit.

Aufgabe 5. Sei H der topologische Raum (E, d_2). Zeige, dass H topologisch homogen ist. Ist der metrische Raum (E, d_2) homogen. Gibt es auf E eine Distanz, sodass d und d_2 topologisch äquivalent sind, und dass der metrische Raum (E, d) homogen ist? Der topologische Raum H heisst Hilbertscher Kubus, nach David Hilbert, geboren am 23. Januar 1862 in Königsberg, verstorben am 14. Februar 1943 in Göttingen. Er ist gemäss einer Vermutung, dadurch charakterisiert, dass die Topologie von H mit einer Distanz definiert ist, und dass H kompakt, zusammenziehbar, mehrpunktig und topologisch homogen ist. Diese Vermutung ist eng verbunden mit dem 5. Problem aus der Liste von Problemen, die D. Hilbert am Internationalen Mathematiker Kongress 1900 präsentiert hat.

Aufgabe 6. Sei $R_{A,B}$ in $\mathbb{R}^2$ das Rechteck $R_{A,B} := [0, A] \times [0, B]$. Zeige, dass $\int_0^{2\pi A} \int_0^{2\pi B} \sin(x)\sin(y)dxdy = 0$ nur dann gilt, wenn A oder B eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 7. Sei das Rechteck $R_{A,B}$ die Vereinigung von endlich vielen Rechtecken $R_i := [a_i, A_i] \times [b_i, B_i], a_i < A_i, b_i < B_i, 1 \leq i \leq N$, derart, dass für jedes $i, 1 \leq i \leq N$, die Differenz $A_i - a_i$ oder $B_i - b_i$ eine rationale Zahl ist und dass gilt $AB = \sum_{i=1}^{N}(A_i - a_i)(B_i - b_i)$. Zeige, dass A oder B eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 8. Die hier folgende BD stammt aus der Antike. Ein Exemplar aus der Zeit um 1000 v.Chr. ist auf babylonischen Tontafeln erhalten, auch das "Schau mal" steht im Original. Diese BD hat dazu beigetragen, dass der Beweis eines Grundlehrsatzes über Dreiecke mit rechtem Winkel in der damaligen Wissensgesellschaft grosse Bekanntheit genoss.



cc+ab/2+ba/2+ab/2+ba/2=(a+b)(a+b)=aa+bb+ab+ba

cc=aa+bb

Es gilt der Lehrsatz von Pythagoras von Samos, geboren in Samos um 570 v.Chr., verstorben in Metapont um 480 v.Chr.: *Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten gleich dem Quadrat über der Hypothenuse.*