Prof. N. A'Campo Sommersemester 2001

Übungen zur Vorlesung Infini II

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf $[a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Für $h \in \mathbb{R}, 0 < h < b - a$ sei $S_{f,h} : [a, b - h] \to \mathbb{R}$ die Sekantensteigungsfunktion $S_{f,h}(x) := (f(x + h) - f(x))/h$. Gilt für $0 < h' < h < b - a$ die Inklusion $S_{f,h}([a, b - h]) \subset S_{f,h'}([a, b - h'])$? Zeige für $0 < h < b - a$, die Inklusion

$$S_{f,h}([a, b - h]) \subset \bigcup_{h' \in]0,h/2]} S_{f,h'}([a, b - h'])$$

Aufgabe 2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeige für $0 < h < b - a$, dass die Inklusion $S_{f,h}([a, b - h]) \subset f'([a, b])$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeige für $a \leq p < q \leq b$, dass $f'([p, q])$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Zeige, dass die abgeleitete Funktion f' die Zwischenwerteigenschaft hat.

Aufgabe 4. Konstruiere eine unstetige Funktion $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, so dass für alle $-1 \leq p < q \leq 1$ das Bild $g([p, q])$ ein Intervall ist. Hat g eine Stammfunktion, d.h. gibt es eine differenzierbare Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f' = g$?

Aufgabe 5. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf $[a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Eine Übersumme von f ist eine Zahl $U \in \mathbb{R}$, die sich für eine endliche Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < .. < a_k = b$ in $k, k \in \mathbb{N}$, Teilintervallen und für Abschätzungen $M_1, M_2, .., M_k$ nach oben von f auf den Teilintervallen $[a_0, a_1], [a_1, a_2], ..., [a_{k-1}, a_k]$ wie folgt schreibt:

$$U = M_1(a_1 - a_0) + M_2(a_2 - a_1) + ... + M_k(a_k - a_{k-1}).$$

Eine Untersumme von f ist eine Zahl $u \in \mathbb{R}$, die sich für eine endliche Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < .. < a_k = b$ in $k, k \in \mathbb{N}$, Teilintervallen und für Abschätzungen $m_1, m_2, .., m_k$ nach unten von f auf den Teilintervallen $[a_0, a_1], [a_1, a_2], ..., [a_{k-1}, a_k]$ wie folgt schreibt:

$$u = m_1(a_1 - a_0) + m_2(a_2 - a_1) + ... + m_k(a_k - a_{k-1}).$$

Für eine nach oben beschränkte Funktion f ist die Riemannsche Übersumme von f definiert als Infimum $I_+(f) \in \mathbb{R}$ aller Übersummen von f. Für eine nach unten beschränkte Funktion f ist die Riemannsche Untersumme von f definiert als Supremum $I_-(f)$ aller Untersummen von f. Für eine beschränkte Funktion f ist die Riemannsche Summe von f gilt $I_-(f) \leq I_+(f)$. Tritt für eine beschränkte Funktion f die Gleichheit $I_-(f) = I_+(f)$ zu, dann heisst f Riemannsche Integrierbar und die Zahl $I(f) := I_-(f) = I_+(f)$ heisst Integral von f. Eine Notation für $I(f)$, die wir hier noch nicht in den Einzelbestandteilen erklären möchten, ist

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Zeige den Satz: Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemannsche integrierbar.

Hinweis: Führe die Annahme $\delta := I_+(f) - I_-(f) > 0$ zum Widerspruch, indem Sie zeigen, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein x_n und ein x'_n in $[a, b]$ existiert mit $f(x_n) - f(x'_n) \geq \delta$ und $|x_n - x'_n| \leq 1/(n + 1)$. Eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $s \in [a, b]$ der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ führt zu einem Widerspruch mit der Annahme der Stetigkeit von f an der Stelle s.

Aufgabe 6. Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Funktion $t \in [a, b] \mapsto F(t) := \int_a^t f(x)dx$. Zeige, dass F die Stammfunktion für f mit $F(a) = 0$ ist. Ist G eine beliebige Stammfunktion für f, dann gilt $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Aufgabe 7. Berechne eine Stammfunktion für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Berechne $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Aufgabe 8. Formuliere Eigenschaften für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$, aus welchen man schliessen kann: $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$. Vergleiche mit Aufgabe 4, siehe “A second course on real functions”, A.C.M. van Rooij & W.H. Schikhof, Cambridge University Press, 1982.

Aufgabe 9. Sei $\phi : [a, b] \to [p, q]$ bijektiv, differenzierbar mit $\phi'(x) > 0, x \in [a, b]$. Sei $f : [p, q] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige: $\int_a^b f \circ \phi(x)\phi'(x)dx = \int_p^q f(y)dy$. Hinweis: Sei F eine Stammfunktion für f. Dann ist $F \circ \phi$ eine Stammfunktion für $f \circ \phi\phi'$.

Aufgabe 10. Berechne $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x \sin(x^2)dx$ und $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 \sin(x^3)dx$.

Aufgabe 11. Für $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar gilt $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)dx$. Berechne $\int_0^\pi x \sin(x)dx$ und $\int_0^\pi x^2 \sin(x)dx$.