# Übungen zur Vorlesung Infini I

## 9. Aufgabenblatt

**Aufgabe 1**. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f_-(x) := \mathrm{Sup}\{f(t) \mid t \in \mathbb{R}, t < x\}$ und sei $f_+(x) := \mathrm{Inf}\{f(t) \mid t \in \mathbb{R}, t > x\}$. Für $x \in \mathbb{R}$ zeige $f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x)$.

**Aufgabe 2**. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeige für $p \in \mathbb{R}$, dass die Funktion an der Stelle $p$ genau dann stetig ist, wenn $f_-(p) = f(p) = f_+(p)$ gilt.

**Aufgabe 3**. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und surjektiv. Zeige, dass $f$ stetig ist.

**Aufgabe 4**. Sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Für $x \in [0,1]$ sei $s(x) := f_+(x) - f_-(x)$. Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $S_n := \{x \in [0,1] \mid ns(x) > 1\}$ endlich ist. Zeige, dass die Menge $S := \{x \in [0,1] \mid s(x) > 0\}$ abzählbar ist. Hinweis: $S = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

**Aufgabe 5**. Sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wir nehmen an, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Gleichheit $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ gilt, sobald beide Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren. Zeige, dass die Funktion $f$ stetig ist. Gilt diese Folgerung auch ohne die Annahme, das $f$ beschränkt ist?

**Aufgabe 6**. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0) = 0$ und durch $f(x) = \frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}$ falls $x \neq 0$. Ist die Funktion $f$ stetig?

**Aufgabe 7**. Sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0) = 0$ und für $x \neq 0$ durch

$$f(x) = \frac{(-1)^{[1/x]}}{[1/x]+1} + (-1)^{[1/x]+1}(2[1/x]+1)\left(x - \frac{1}{[1/x]+1}\right)$$

wobei für $t \in \mathbb{R}$ die Klammer $[t]$ die grösste ganze Zahl $n$ mit $n \leq t$ ist. Stelle $f$ graphisch dar. Zeige, dass $f$ stetig ist. Ist die Länge des Graphen von $f$ endlich? Ist Ihre graphische Darstellung wirklich eine?

**Aufgabe 8**. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $g_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion $g_\alpha(x) = \sqrt[3]{f(x)} - \alpha x$ (wobei $f$ wie in Aufgabe 7). Sei $p_\alpha \in [0,1]$ die grösste Stelle, wo die Funktion $g_\alpha$ ihr Maximum hat. Sei $M_\alpha = g_\alpha(p_\alpha)$. Sind die Funktionen $\alpha \in \mathbb{R} \mapsto p_\alpha \in [0,1]$ und $\alpha \in \mathbb{R} \mapsto M_\alpha \in \mathbb{R}$ stetig?

**Abgabe der Aufgaben** bis Donnerstag, den 17. Januar 2001.