Prof. N. A'Campo Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung Infini I

8. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Zeige, dass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N},n\geq 1} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ konvergent ist.

Aufgabe 2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Für $k \in \mathbb{N}$, sei $m_k := \mathrm{Inf}\{a_n \mid n \geq k\}$ und $M_k := \mathrm{Sup}\{a_n \mid n \geq k\}$. Zeige, dass die Folgen $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren. Zeige, dass $\lim_{k\to\infty} m_k$ der kleinste und dass $\lim_{k\to\infty} M_k$ der grösste Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nur dann konvergent, wenn $\lim_{k\to\infty} m_k = \lim_{k\to\infty} M_k$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \notin \mathbb{Q}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := n\alpha - [n\alpha]$. Zeige, dass es für jedes $L \in [0, 1]$ eine streng wachsende Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_{\phi(n)} = L$ gibt.

Aufgabe 4. Ist die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N},n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergent?

Aufgabe 5. Zeige für $N \in \mathbb{N}, N \geq 1$ die Ungleichung $\sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{N}}$.

Aufgabe 6. Schliesse die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N},n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Aufgabe 7. Zwei Fussballer A und B befinden sich in $p_0 \in \mathbb{R}^2$ und $q_0 \in \mathbb{R}^2$. Spieler A läuft von p_0 aus auf Spieler B in q_0 zu, und zwar so: er läuft geradlinig eine Laufstrecke S, die in p_0 beginnt und deren Länge genau

$$\sqrt{(x(p_0) - x(q_0))^2 + (y(p_0) - y(q_0))^2},$$

also die Distanz von A zu B, beträgt. Aber aus Rücksicht auf Spieler B wählt A die Strecke S so, dass sie mit der Verbindungsstrecke von p_0 nach q_0 einen Winkel von 45 Grad nach links bildet. Die neue Position von A ist dann der Endpunkt p_1. Nun ist B dran und läuft auf A in p_1 zu, und zwar mit dergleichen Taktik wie A, was Länge der Laufstrecke und Rücksichtnahme betrifft. Weiter gehts. Es entsteht ein Spielkontakt und Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Positionen von A und B. Zeige, dass die Folgen in $\mathbb{R}^2$ Cauchy-Folgen sind. Berechne $\lim_{n\to\infty} p_n$ unter der Startbedingung $p_0 = (0, 0)$ und $q_0 = (0, 1)$.

Aufgabe 8. Bekanntlich spielt man nicht in $\mathbb{R}^2$ sondern auf der Erdkugel, deren Umfang 40000000 Meter beträgt. Mit welcher Dezimalstellengenauigkeit müssen A und B rechnen um zu merken, dass Sie nicht in $\mathbb{R}^2$ spielen.

Frohe Festtage und erfolgreiches Heimspiel.

Abgabe der Aufgaben bis Donnerstag, den 11. Januar 2001.