Prof. N. A'Campo Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung Infini I

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, sei $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$. Für $x \geq 1$ gilt $f(x) \geq 1$. Zeige für $x, y, h \in \mathbb{R}, x, y \geq 1, h \geq 0$, die Ungleichungen:

$$\sqrt{1+x+h} - \sqrt{1+x} \leq h/2,$$

$$|f(y) - f(x)| \leq 3/4|y-x|$$

.

Aufgabe 2. Zeige für $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$, dass die durch $a_0 = x, a_{n+1} = f(a_n)$, rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Hinweis: Zeige für $p, q \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|a_p - a_q| \leq (1-3/4)^{-1}(3/4)^{1-\min(p,q)}|x - f(x)|$. Sei nun $y := \lim_{n\to\infty} f^n(x) = \lim_{n\to\infty} a_n$. Zeige: $f(y) = y$.

Aufgabe 3. Zeige, dass die Gleichung $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+\sqrt{1+x}} = x$ in $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ genau eine Lösung hat.

Aufgabe 4. Sei $P(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n, n > 0$, ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass die Folge $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ keine Häufungspunkte hat. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Folge $(P(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nur dann Häufungspunkte hat, wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Häufungspunkte hat.

Aufgabe 4. Ist die Folge $(P(n+1)P(n-1)/(P(n)^2+1))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent?

Aufgabe 5. Zeige: $3/4 < 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - .... < 4/5$.

Aufgabe 6. Sei $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Steigung. Zeige, dass die Folge $(\lambda(n)/n)_{n\in\mathbb{N}, n>0}$, eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Hinweis: sei $S \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ die Abschätzung $|\lambda(n+m) - \lambda(n) - \lambda(m)| \leq S$ gilt; zeige für $n, m \in N, n, m > 0$, die Abschätzung $|\lambda(n)/n - \lambda(m)/m| \leq (1/n + 1/m)S$.

Aufgabe 7. Zeige, dass die Steigung λ ein Repräsentant für $\lim_{n\to\infty} \lambda(n)/n \in \mathbb{R}$ ist.

Abgabe der Aufgaben bis Donnerstag, den 21. Dezember 2000.