Prof. N. A'Campo Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung Infini I

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $\{1,2,3,4,5,6\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen in $\{1,2,3,4,5,6\}$. F"ur $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{1,2,3,4,5,6\}^{\mathbb{N}}$ sei $\alpha(a)$ die folgende Folge:

$$\begin{aligned}
\alpha(a)_0 &= \sqrt{a_0},\\
\alpha(a)_1 &= \sqrt{a_0+\sqrt{a_1}},\\
\alpha(a)_2 &= \sqrt{a_0+\sqrt{a_1+\sqrt{a_2}}},\\
&\vdots\\
\alpha(a)_n &= \sqrt{a_0+\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_{n-1}+\sqrt{a_n}}}}}.
\end{aligned}$$

Zeige f"ur $a \in \{1,2,3,4,5,6\}^{\mathbb{N}}$, dass die Folge $\alpha(a)$ nach oben durch 6 beschr"ankt ist. Weiter zeige, dass die Folge $\alpha(a)$ monoton wachsend ist, und somit in $\mathbb{R}$ konvergiert. Sei $\lambda(a)$ der Grenzwert der Folge $\alpha(a)$. Ist die Abbildung $\lambda : \{1,2,3,4,5,6\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}, a \mapsto \lambda(a)$, injektiv? Zeige, dass die Einschr"ankung von λ auf $\{1,6\}^{\mathbb{N}}$ injektiv ist. Schliesse, dass das Bild $\Lambda \subset \mathbb{R}$ der Abbildung $\lambda : \{1,2,3,4,5,6\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ nicht abz"ahlbar ist.

Aufgabe 2. Ein $g \in \mathbb{R}$ heisst *Maximum von* Λ wenn sowohl $g \in \Lambda$ wie auch f"ur jedes $h \in \Lambda$ die Ungleichung $h \leq g$ gilt. Hat Λ Maxima? Wieviele?

Aufgabe 3. Ein $g \in \mathbb{R}$ heisst *lokales Maximum von* Λ wenn sowohl $g \in \Lambda$ wie auch ein $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, existiert, so dass g das Maximum der Menge $\{h \in \Lambda \mid |h-g| \leq \epsilon\}$ ist. Konstruire mehrere lokale Maxima der Menge Λ.

Aufgabe 4. Zeige, dass die Menge der lokalen Maxima der Menge Λ abz"ahlbar ist.

Aufgabe 5. Konstruire ein $g \in \Lambda$, so dass g weder lokales Maximum noch lokales Minimum ist.

Aufgabe 6. Sei m das Minimum von Λ. Zeige f"ur $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $m^2 - (1+m)| < 1/(N+1)$. Schliesse, dass $m^2 - m - 1 = 0$ gilt. Da $m > 1$ folgt $m = 1/2 + 1/2\sqrt{3}$.

Aufgabe 7. Gebe eine rationale Zahl p/q mit $1 \leq q \leq 1000$ an, so dass f"ur alle $u, v \in \mathbb{Z}, 1 \leq v \leq 1000$, die Ungleichung$|m - p/q| \leq |m - u/v|$ zutrifft.

Abgabe der Aufgaben bis Mittwoch, den 13. Dezember 2000.