Prof. N. A'Campo Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung Infini I

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. F"ur $x \in \mathbb{R}$ zeige: $x^2 \geq 0$.

Aufgabe 2. Sei $y \in \mathbb{R}, y > 0$. F"ur $n \in \mathbb{N}$ sei $W_y(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid k^2 \leq n^2 y\}$. Zeige, dass mit $W_y(-n) = -W_y(n)$ eine Steigung $W_y : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert ist. Sei $w_y \in \mathbb{R}$ die reelle Zahl, die durch W_y repr"asentiert wird. Zeige $w_y > 0$ und $w_y^2 = y$.

Aufgabe 3. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein K"orperautomorphismus, d.h. dass ϕ den K"orperaxiomen des Tripels $(\mathbb{R}, +, .)$ treu ist. Dies wird durch die folgenden Formeln ausgedr"uckt: f"ur $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y),$$

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y),$$

$$\phi(1) = 1.$$

F"ur $x \in \mathbb{Z}$ zeige $\phi(x) = x$. F"ur $x \in \mathbb{Q}$ zeige $\phi(x) = x$.

Aufgabe 4. F"ur $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ zeige $\phi(x) < \phi(y)$. Sobald $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Addition, Multiplikation und 1 treu ist, ist ϕ auch der Ordnung $<$ treu.

Aufgabe 5. F"ur $x \in \mathbb{R}$ sei $D_x = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\}$. Zeige $\operatorname{Sup} D_x = x$. Zeige

$$\phi(x) = \operatorname{Sup} D_{\phi(D_x)} = \operatorname{Sup} \phi(D_x) = \operatorname{Sup} D_x = x.$$

Das Quadrupel $(\mathbb{R}, +, ., <)$ hat keine Symmetrien ausser der Symmetrie $x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 6. F"ur $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $xyz = 1$ zeige

$$(x^2 - 1 + 1/y^2)(y^2 - 1 + 1/z^2)(z^2 - 1 + 1/x^2) \leq 1.$$

Abgabe der Aufgaben bis Mittwoch, den 6. Dezember 2000.