Prof. N. A'Campo Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung Infini I

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $n \in \mathbb{N}, n > 0$, und $x, a \in \mathbb{R}$ zeige

$$|(x+a)^n - x^n| \leq n|a|(|x| + |a|)^{n-1}.$$

Aufgabe 2. Für $x \in \mathbb{R}$, sei $p(x) := x^{11} - x^{13} + x^{17} + x^{19} - 1$. Für $N \in \mathbb{N}, N > 0$, fest, für $y \in \mathbb{R}, -1 \leq y \leq 1$, zeige, dass ein $h \in \mathbb{N}, h \leq N$, mit

$$0 \leq y - p(h/N) \leq 60/N((N+1)/N)^{18}$$

existiert.

Aufgabe 3. Für $y \in \mathbb{R}, -1 \leq y \leq 1$, und $N \in \mathbb{N}, N > 0$, sei $h_N \in \mathbb{N}, h_N \leq N$, mit

$$0 \leq y - p(h_N/N) \leq 60/N((N+1)/N)^{18}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \text{Supremum}\{h_N/N \mid N > n\}$ und sei $t := \text{Infimum}\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeige $t \in \mathbb{R}, -1 \leq t \leq 1$, und $p(t) = y$.

Aufgabe 4. Berechne

$$\text{Minimum}\{|p(t/1000000000000000000)| \mid t \in \mathbb{Z}, |t| \leq 1000000000000000000\}.$$

Aufgabe 5. Berechne $\text{Infimum}\{\sqrt{n^2 + n + 1000000000000000000} - n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Abgabe der Aufgaben bis Mittwoch, den 30. November 2000.