Prof. N. A'Campo Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung Infini I

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Zeige mit vollst"andiger Induktion die *Binomial-Formel*

$$(x+y)^n = \sum_{0\le i\le n} C_i^n x^i y^{n-i},$$

wobei C_i^n die Anzahl i-elementiger Teilmengen in einer n-elementigen Menge ist.

Aufgabe 2. F"ur $n \in \mathbb{N}$ sei $p(n)$ die Anzahl Zerlegungen von n als Summe der Form

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k,$$

wobei $k \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{N}, x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_k > 0$, gilt. Eine derartige Zerlegung von n heisst *Partition der Länge* k von n. Sei $p^*(n)$ die Anzahl der Partitionen $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ mit $x_k > 1$. F"ur $n \in \mathbb{N}, n > 0$, zeige man: $p^*(n) = p(n) - p(n-1)$. F"ur eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definieren wir die Abbildung $\Delta(f) : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ durch $\Delta(f)(n) := f(n+1) - f(n)$. Zeige:

$$\Delta^2(p)(n) = p(n+2) - 2p(n+1) + p(n) = p^*(n+2) - p^*(n+1) \ge 0.$$

F"ur $i \in \mathbb{N}, i > 1$, zeige, die Ungleichungen $\Delta^i(p)(n) \ge 0, n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. Eine Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ heisst *konvex*, wenn f"ur $n \in \mathbb{Z}, u, v \in \mathbb{N}, u > 0, v > 0$, gilt $(u+v)\phi(n+u) \le v\phi(n) + u\phi(n+u+v)$. F"ur eine Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ zeige, die "Aquivalenz:

$\Delta^2(\phi) \ge 0 \Leftrightarrow \phi$ konvex.

Zeige, dass eine konvexe Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ nur dann beschr"ankt ist, wenn sie konstant ist.

Aufgabe 4. Sei $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Steigung mit $\alpha(0) = 0$ und $\Delta^2(\alpha)(n) \ge 0, n \in \mathbb{Z}$,. Zeige, dass ein $s \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $\alpha(n) = sn, n \in \mathbb{Z}$, gilt.

Aufgabe 5. Wir st"oren die Binomial-Formel und schreiben:

$$(x+y)^n = \sum_{0\le i\le n} C_i^n x(x-iu)^{i-1}(y+iu)^{n-i}.$$

F"ur feste $x, y \in \mathbb{Z}$ sei der "Fehler" der gest"orten oder zerst"orten Formel

$$\phi(u) := (x+y)^n - \sum_{0\le i\le n} C_i^n x(x-iu)^{i-1}(y+iu)^{n-i}.$$

Somit ist eine Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ erkl"art. Zeige mit vollst"andiger Induktion $\Delta(\phi)(u) = 0$. Schliesse, dass die Abbildung ϕ konstant ist, und dass auch die gest"orte Binomial-Formel eine Entwicklung von $(x + y)^n$ ist, solange x, y, u ganzizahlig sind. Diese Entwicklung, die, wie wir sp"ater sehen werden, auch f"ur nicht ganzzahlige Werte von x, y, z gilt, stammt von Niels Henrik Abel, 1802-1829, (siehe: *Beweis eines Ausdruckes, vom welchem die Binomial-Formel ein einzelner Fall ist*, Crelle, **1** (1826) 159-160 .

Aufgabe 6. Eine Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ heisst *polynomial* wenn ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\Delta^k(\phi) = 0$ existiert. Kann man jede polynomiale Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ als $\phi(n) = c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \cdots + c_1 n + c_0$ f"ur ein $k \in \mathbb{N}$ schreiben? Kann man die *Koeffizienten* c_i ganz w"ahlen?

Abgabe der Aufgaben 1-5 bis Donnerstag, den 23. November 2000.