Prof. N. A'Campo Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung Infini I

12. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $E = (\mathbb{R}^2, s)$ die Euklidische Ebene, siehe Blatt 11. An der Stelle $q \in E$ ist ein Bär und Sie befinden sich an der Stelle $p \in E$. Es gilt $q \neq p$, ouf! Der Fluchtsektor $F_{q;p}$ ist die Menge $F_{q;p} := \{p + h \mid h \in \mathbb{R}^2, \sigma(h) > 0\}$ wobei $\sigma(h) = \lim_{t \to 0, t>0,} (||p+th-q|| - ||p-q||)/t$ ist. Zeige $F_{q;p} = \{p+h \mid h \in \mathbb{R}^2, s(p-q,h) > 0\}$. Stelle den Fluchtsektor geometrisch dar.

Aufgabe 2. Nun wird es gefährlich. An den Stellen $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k \in E$ geniessen Bären die Euklidische Landschaft und Sie befinden sich mit Sichtkontakt an der Stelle $p \in E$. Der Fluchtsektor $F_{q_1,q_2,q_3,\dots,q_k;p}$ ist der Durchschnitt $\cap_{1 \leq j \leq k} F_{q_j;p}$. Bestimme die Punktmenge aller $p \in E$ mit $F_{q_1,q_2,q_3,\dots,q_k;p} \neq \emptyset$. Zeige, dass das Komplement der Punktmenge mit nichtleerem Fluchtsektor die konvexe Hülle in E der Menge $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_k\}$ ist.

Aufgabe 3. Das Paar $(\mathbb{C}, s)$, wobei das Skalarprodukt durch $s(u,v) = \Re(u\bar{v})$ gegeben ist, ist ein Modell für die Euklidische Ebene. Für $z \in \mathbb{C}$ lässt der Betrag $|z|$ sich durch $|z|^2 = s(z,z)$ gewinnen. Sei $f(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \dots + a_0$ ein Polynom mit Nullstellen $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_k\} \subset \mathbb{C}$. Zeige:

$$f(z) = \prod_{1 \leq j \leq k} (z - q_j).$$

Zeige, dass das Differential der Abbildung $z \in \mathbb{C} \mapsto |f(z)| \in \mathbb{R}$ an einer Stelle $p \in \mathbb{C}$ mit $f(p) \neq 0$ nicht Null ist, wenn der Fluchtsektor $F_{q_1,q_2,q_3,\dots,q_k;p}$ nicht leer ist.

Aufgabe 4. Für ein Polynom $f(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \dots + a_0, k > 0$, sei $f'(z) = kz^{k-1} + (k-1)a_{k-1}z^{k-2} + \dots + a_1$. Zeige, dass die Nullstellen des Polynoms $f'(z)$ in der konvexen Hülle der Nullstellen des Polynoms $f(z)$ liegen.

Aufgabe 5. Sei $f(z)$ ein Polynom vom Grad 34 mit 34 Nullstellen $q_1, q_2, \cdots, q_{34}$. Wir nehmen an, dass $|q_j| = 1$ gilt und, dass die konvexe Hülle der Punktmenge $\{q_1, q_2, \cdots, q_{34}\}$ ein 34-gon mit einer Drehsymmetrie der Ordnung 17, aber ohne Drehsymmetrie der Ordnung 34 ist. Zeichne die Anordnung der Nullstellen des Polynoms $f'(z)$. Zeige, dass die Koeffizienten von z^j in $f'(z)$ für $0 \leq j \leq 15$ Null sind.

Abgabe der Aufgaben bis Donnerstag, den 15. Februar 2001.