Prof. N. A'Campo Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung Infini I

11. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ das Euklidische Skalarprodukt, so dass die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ orthonormiert ist. Die Vektoren $e_1 := (0,1) \in \mathbb{R}^2$ und $e_2 := (1,0) \in \mathbb{R}^2$ bilden die Standardbasis $e\_ := e_1, e_2$ und es gilt

$$s(ae_1 + be_2, a'e_1 + b'e_2) = aa' + bb'.$$

Die zugehörige Euklidische Standardnorm ist

$$||ae_1 + be_2||_{Eukl} := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Bekanntlich liefert das Euklidische Skalarprodukt eine Längenmessung und eine Winkelmessung. Zum Beispiel stehen zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ senkrecht aufeinander, wenn $s(u, v) = 0$ gilt, und dann gilt auch

$$||u||^2_{Eukl} + ||v||^2_{Eukl} = ||u + v||^2_{Eukl}$$

für die Längen $||u||^2_{Eukl}, ||v||^2_{Eukl}$ und $||u + v||^2_{Eukl}$ der Vektoren u, v und $u + v$.

Zeige, dass für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ genau ein Vektor $\bar{L}^s \in \mathbb{R}^2$ existiert, derart, dass für jeden Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ gilt: $L(u) = s(\bar{L}^s, u)$. Eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heisst Linearform auf $\mathbb{R}^2$. Der zugeordnete Vektor $\bar{L}^s$ heisst s − Gradient von der Linearform L.

Das Paar $(\mathbb{R}^2, s)$ ist ein Modell für die Euklidische Ebene E.

Aufgabe 2. Für einen Punkt $p \in E$ in der Euklidischen Ebene sei $S_p : E \to \mathbb{R}$ die Funktion $S_p(q) := s(p - q, p - q)$ und $\lambda_p : E \to \mathbb{R}$ die Funktion $\lambda_p(q) := \sqrt{S_p(q)}$. Berechne das Differential an einer Stelle $q \in E$ der Funktion S_p. Berechne das Differential an einer Stelle $q \in E, q \neq p$, der Funktion λ_p. Diese Differentiale sind Linearformen auf $\mathbb{R}^2$, für die man die s − Gradienten ausrechne und geometrisch darstelle.

Aufgabe 3. Sei $\Delta = (A, B, C)$, $A, B, C \in E$, ein Dreieck in E. Wir nehmen an, dass jeder Winkel von Δ weniger als das Doppelte der Summe der beiden andern Winkeln betrage. Zeige, dass es genau einen Punkt $P \in E$ gibt, so dass die Funktionen λ_A, λ_B und λ_C an der Stelle P differenzierbar sind und dass an der Stelle P das Differential der Funktion $\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C$ gleich Null ist. Die Bahngesellschaft stellt fest, dass A, B und C die relevanten Metropolen im Euklidischem Land sind. Wo wird die Bahngesellschaft eine Megametropole mit Bahnhof bauen? Zeige, dass das Bahnnetz mit den Strecken PA, PB und PC das kürzeste Netz ist, das A, B und C verbindet.

Aufgabe 4. Im Nachbarland, auch Euklidisch, bilden die relevanten Metropolen ein Viereck (A, B, C, D), rechtwinklig und gleichseitig versteht sich. Kann man mit einer einzigen weiteren Megametropole P ein Bahnnetz einrichten, das A, B, C und D miteinander verbindet und so dass die Gesamtlänge des Bahnnetzes minimal ist?

Aufgabe 5. Löse mittels zweier zusätzlicher Megametropolen P, Q das Problem,ein Bahnnetz mit minimaler Gesamtbahnlänge, das A, B, C und D miteinander verbindet, zu finden. Das Problem ist symmetrisch, hat aber keine symmetrische Lösung. Streit der Lobbyisten Süd-Nord und West-Ost, die Grundstücksinhaber vertreten, ist nun vorprogrammiert.

Abgabe der Aufgaben bis Donnerstag, den 8. Februar 2001.