Prof. N. A'Campo Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung Infini I

10. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle $0 \in \mathbb{R}$. Es gilt weiter für $x \in [-1, 1], x \neq 0$, die Ungleichung: $|f(x) - x| \leq x/[1/x]$. Hier ist $[t]$ die Gauss'sche Klammer, siehe Blatt 9, Aufgabe 7. Zeige, dass f an der Stelle 0 differenzierbar ist.

Aufgabe 2. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle $0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass der Grenzwert $\lim_{h \to 0, h \neq 0}(f(2h) - f(h))/h$ existiert. Zeige, dass f an der Stelle 0 differenzierbar ist.

Aufgabe 3. Zeige für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy > 0$ die Ungleichung

$$11|\sqrt[11]{x} - \sqrt[11]{y}| \leq \frac{|x - y|}{\sqrt[11]{\max(|x|, |y|)}}.$$

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = -1$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 0$. Gibt es eine differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$?

Aufgabe 5. Sei die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist dann die abgeleitete Funktion F' stetig?

Aufgabe 6. Für $v \in \mathbb{R}^n$ vergleichen wir die Normen $||v||_{eukl} := \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} x_i(v)^2}$, $||v||_{max} := \max\{|x_i(v)| \mid 1 \leq i \leq n\}$ und $||v||_+ := \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i(v)|$. Zeige für $v \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichungen

$$||v||_{max} \leq ||v||_{eukl} \leq ||v||_+ \leq n||v||_{max}.$$

Aufgabe 7. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Wir können $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ mit einer der Normen der Aufgabe 6 ausstatten. Ins Gesamt haben wir 9 Möglichkeiten Definitions- und Bereichsraum der Abbildung f mit einer Norm auszustatten. Zeige, dass wenn f für eine der Ausstattungen stetig ist, dann ist f für jede der Ausstattungen stetig.

Aufgabe 8. An welchen Stellen $p \in \mathbb{R}^n$ sind die Normfunktionen $||.||_{eukl}$, $||.||_{max}$ und $||.||_+$ differenzierbar?

Abgabe der Aufgaben bis Donnerstag, den 25. Januar 2001.