Prof. N. A'Campo Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung Infini I

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $(K, +, .)$ ein K"orper. Seien a, b, c, d Elemente in K. Seien $A := (a + b)(c + d), B := (a + c)(b + d), C := (a + d)(b + c)$.

Zeige, dass die Aussage $\#\{a, b, c, d\} = 4$ zu der Aussage $\#\{A, B, C\} = 3$ "aquivalent ist.

Welche K"orperaxiome haben Sie im Beweis ben"utzt? Ist es unerl"asslich, dass K kommutativ ist?

Aufgabe 2. F"ur $n \in \mathbb{N}$ sei $E_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k^5 + n^4 k \leq 7n^5\}$. Zeige, dass f"ur jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge E_n endlich ist. Zeige, dass die Zuordnung $\alpha : n \in \mathbb{N} \mapsto \max E_n \in \mathbb{N}$ eine Steigung ist. Bestimme eine reelle Zahl x, die die Gleichung $x^5 + x - 7 = 0$ erf"ullt. Hinweis: Leite f"ur $s, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ her $s\alpha(n) \leq \alpha(sn) \leq s(\alpha(n) + 1)$. F"ur $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$vergleiche geeignete Vielfachen von $\alpha(n), \alpha(m), \alpha(n + m)$ mit $\alpha(nm(n + m))$.

Aufgabe 3. F"ur $n \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $A_{n,k}$ die Menge aller Abbildungen

$$\sigma : \{1, 2, 3, \cdots, k\} \to \{-1, +1\}$$

mit

$$\sum_{1 \leq i \leq k} \sigma(i) = n.$$

Zeige:

$\#A_{0,2k+1} = 0, \#A_{0,2k} = (2k)!/(k!)^2$ f"ur $k \in \mathbb{N}$ (Aufpassen bei $k = 0$).

$\#A_{n,k} = 0$ f"ur $n - k$ ungerade.

$\#A_{n,k} = \#A_{n-1,k-1} + \#A_{n+1,k-1}$ f"ur $n \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$.

$\sum_{-k \leq n \leq k} \#A_{n,k} t^n = (1/t + t)^k, t \in \mathbb{R}, t \neq 0, k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4. Berechne $\#A_{n,k}$. F"ur k gross, ist dann $\#A_{0,2k}$ gr"osser als $2^k, 3^k, 4^k$ oder 5^k?

Abgabe der Aufgaben bis Donnerstag, den 9. November 2000.