Dr. Alexander N. Schumakovitch Sommersemester 2002

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Homotopietheorie

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Lebesguesches Lemma Seien X ein kompakter metrischer Raum, Y ein topologischer Raum und $f : X \to Y$ stetig. Sei auch Γ eine offene Überdeckung von Y. Beweise, dass es $\delta > 0$ existiert, so dass für jede offene Teilmenge $A \subset X$ mit $\mathrm{diam}(A) < \delta$ das Bild $f(A)$ in einem Element von Γ enthalten ist. (6)
Erinnerung: $\mathrm{diam}(A) < \delta$ falls $\rho(x,y) < \delta$ für alle $x, y \in A$.

Tip: Finde eine Funktion $r : X \to \mathbb{R}_+$, so dass $f(D_{r(x)}(x))$ in einem Element von Γ für jedes $x \in X$ enthalten ist.

Aufgabe 2. Beweise, dass $\pi_1(S^n, (1, 0, \dots, 0))$ für $n \geq 2$ trivial ist. Verwende zum Beispiel folgendes Verfahren:

1. Beweise, dass jede Schlinge $s : I \to S^n$, die nicht surjektiv ist, zu einer konstanten Schlinge homotop ist;
2. Seien X ein topologischer Raum, $s : I \to X$ ein Weg und Γ eine offene Überdeckung von X. Beweise, dass es eine Folge von Punkten $a_0, a_1, \dots, a_N \in I$ mit $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = 1$ existiert, so dass $s([a_i, a_{i+1}])$ in einem Element von Γ für jedes $0 \leq i < N$ enthalten ist; (10)
   Tip: Aufgabe 1.
3. Sei $s : I \to S^n$ eine Schlinge. Beweise, dass es eine Zerlegung von I in endlich viele Intervalle $I_1, I_2, \dots, I_N$ existiert, so dass $s\big|_{I_i}$ für jedes i zu einer Abbildung endpunktig-homotop ist, deren Bild den Punkt $(-1, 0, \dots, 0))$ nicht enthält;
4. Beweise, dass jede Schlinge in S^n zu einer nicht surjektiven Schlinge homotop ist;
5. Beweise, dass $\pi_1(S^n, (1, 0, \dots, 0)$ für $n \geq 2$ trivial ist;
6. Finde alle Plätze im Beweis, wo man die Voraussetzung $n \geq 2$ benutzen muss.

Aufgabe 3. 1. Sei X ein topologischer Raum, $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$, so dass U, V und $U \cap V$ einfach zusammenhängend sind. Beweise, dass X auch einfach zusammenhängend ist. (7)
2. Zeige, dass die Bedingung, dass beide U und V offen sind, notwendig ist.

Aufgabe 4. Seien $a : I \to X$ eine Schlinge, die ein Element $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ repräsentiert, und $s : I \to X$ ein Weg mit $s(0) = x_0$. Beweise, dass eine freie Homotopie $H : I \times I \to X$ zwischen a und einer $T_s(\alpha)$ repräsentierten Schlinge existiert, so dass $H(0,t) = H(1,t) = s(t)$ für alle $t \in I$ gilt. (4)

Aufgabe 5. Seien $a, b : I \to X$ zwei Schlingen, die durch einer Homotopie $H : I \times I \to X$ homotop sind, so dass $H(0,t) = H(1,t)$ für alle t gilt (d.h. H ist eine freie Homotopie von Schlingen). Sei $s : I \to X : t \mapsto H(0,t)$ der Weg. s ist die Spur von Endpunkten der Schlinge unter der Homotopie. Beweise, dass die Homotopieklasse von b ein Bild der Homotopieklasse von a unter $T_s : \pi_1(X, s(0)) \to \pi_1(X, s(1))$ ist. (4)

Total Punkte: (31)

Abgabe bis Donnerstag, den 30. Mai, um 12 Uhr.