Prof. N. A'Campo Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung Geometrie I

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $X = (X, d)$ ein nichtleerer, kompakter, metrischer Raum. Sei $f : X \to X$ stetig. Zeige $\cap_{n \in \mathbb{N}} f^n(X) \neq \emptyset$.

Aufgabe 2. Sei $X = (X, d)$ ein kompakter metrischer Raum. Sei $f : X \to X$ stetig und expandierend, d.h. für alle $p, q \in X$ gilt $d(f(p), f(q)) \geq d(p, q)$. Zeige, dass f bijektiv ist. Hinweis: setze $Y := \cap_{n \in \mathbb{N}} f^n(X)$. Es gilt $f(Y) = Y$. Für $p \in X$ setze $d_Y(p) := \text{Infimum}_{q \in Y} d(p, q)$. Es gilt: $d_Y(p) \leq d_Y(f(p))$. Für ein $p \in X \setminus Y$ hätte die Folge $(f^n(p))_{n \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 3. Sei $X = (X, d)$ ein kompakter metrischer Raum. Für $\epsilon > 0$ sei $N_X(\epsilon)$ die kleinste ganze n Zahl derart, dass n Punkte $p_1, p_2, \cdots p_n$ in X mit $X = \cup_{i=1,2,\cdots n} B(p_i, \epsilon)$ existieren. Die Hausdorffsche Dimension des Raumes X ist $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log(N_X(\epsilon))}{-\log(\epsilon)}$. Sei $||?||_V$ eine Norm eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes endlicher Dimension. Sei X eine Kugel in $(V, ||?||_V)$. Berechne $\mathrm{H} - \mathrm{Dim}(X)$.

Aufgabe 4. Sei V ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Konstruiere in $(V, ||?||_V)$ eine kompakte Teilmenge X mit Hausdorffscher Dimension $\sqrt{2}$.

Aufgabe 5. Sei $X = (X, d)$ ein kompakter metrischer Raum. Zeige, dass die Topologie des Raumes X von abzählbar vielen offenen Teilmengen erzeugt wird.

Aufgabe 6. Sei A eine Menge. Der Raum $X := \Pi_{\alpha \in A}[0, 1]$ mit der Produkttopologie ist kompakt. Zeige, dass die Topologie des Raumes X nicht durch eine Metrik erklärt werden kann, wenn die Menge A überabzählbar ist.

Aufgabe 7. Definiere die Topologie des Raumes $X := \Pi_{\alpha \in \mathbb{N}}[0, 1]$ mit einer Metrik.

Aufgabe 8. Zeige, dass der Raum $X := \Pi_{\alpha \in \mathbb{N}}[0, 1]$, der auch Kubus von Hilbert genannt wird, topologisch homogen ist, d.h. für $p, q \in X$ existiert ein Homöomorphismus $f : X \to X$ mit $f(p) = q$.

Aufgabe 9. Ist $[0, 1] \times [0, 1]$ topologisch homogen?