Dr. Alexander N. Schumakovitch Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Vorlesung Flächen und Mannigfaltigkeiten

5. Aufgabenblatt

Abgeschlossene Abbildungen

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heisst *abgeschlossen*, wenn das Bild $f(A)$ jeder abgeschlossenen Teilmenge A von X abgeschlossen ist.

Aufgabe 1. Seien X und Y topologische Räume, so dass X kompakt und Y Hausdorffsch sind. Beweise, dass
- a) jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ abgeschlossen ist; 4
- b) jede stetige Injektion $f : X \to Y$ eine topologische Einbettung ist;
- c) jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus ist.

Quotientenräume

Aufgabe 2. Beweise, dass
- a) ${[0,1]}/{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}$ zu $[0,1]$ homöomorph ist; 2
- b) ${[0,1]}/{\{\frac{1}{3}, 1\}}$ zur Buchstabe P homöomorph ist.

Aufgabe 3. Beweise, dass die Verklebung von zwei Kopien der Kugel D^n vermöge der identischen Abbildung von $\partial D^n = S^{n-1}$ zu S^n homöomorph ist. D.h. S^n ist die Verdoppelung von D^n. 2

Tip: Finde eine passende stetige Surjektion $D^n \amalg D^n \to S^n$.

Aufgabe 4. Beweise, dass die Kleinsche Flasche das Resultat der Verklebung von zwei Kopien des Möbiusschen Bandes vermöge der identischen Abbildung der Randkreislinie ist. 2

Aufgabe 5. Beweise, dass folgende Quotientenräume von D^2 zu D^2 homöomorph sind:
- a) ${D^2}/{[(x,y) \sim (-x,-y)]}$,
- b) ${D^2}/{[(x,y) \sim (x,-y)]}$, 3
- c) ${D^2}/{[(x,y) \sim (-x,y)]}$.

Aufgabe 6. Beweise, dass ${\mathbb{R}^1}/{[x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}]}$ zu S^1 homöomorph ist. 2

Mannigfaltigkeiten

Aufgabe 7. Beweise, dass ein offener Teilraum einer Mannigfaltigkeit der Dimension n auch eine Mannigfaltigkeit der Dimension n ist. 2

Aufgabe 8. Seien X und Y Mannigfaltigkeiten der Dimensionen p bzw. q. Beweise, dass
- a) $X \times Y$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $p + q$ ist;
- b) $\operatorname{int}(X \times Y) = \operatorname{int} X \times \operatorname{int} Y$; 4
- c) $\partial(X \times Y) = (\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y)$.

Aufgabe 9. Beweise, dass eine Mannigfaltigkeit genau dann zusammenhängend ist, wenn ihres Innere zusammenhängend ist. 2

Aufgabe 10. Sei $g : \partial\mathbb{R}^n_+ \cong \mathbb{R}^{n-1} \to \partial\mathbb{R}^n_+$ ein Homöomorphismus. Beweise, dass $\mathbb{R}^n_+ \cup_g \mathbb{R}^n_+$ zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist. 2

Aufgabe 11. Seien X und Y Mannigfaltigkeiten der Dimension n.

1. Seien auch A und B Komponenten von ∂X bzw. ∂Y. Beweise, dass für jeden Homöomorphismus $h : B \to A$ der Raum $X \cup_h Y$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension n ist. 5
2. Seien auch A und B abgeschlossene Teilmenge von ∂X bzw. ∂Y, die Mannigfaltigkeiten der Dimension $n-1$ sind. Beweise, dass für jeden Homöomorphismus $h : B \to A$ der Raum $X \cup_h Y$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension n ist.

Total Punkte: 30

Abgabe bis Freitag, den 15. Februar, um 10 Uhr.