Dr. Alexander N. Schumakovitch Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Vorlesung Flächen und Mannigfaltigkeiten

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Beweise, dass $[0,1]$, $\mathbb{R}^1$, S^1 und $[0,\infty)$ paarweise nicht homöomorph sind. 2

Aufgabe 2. Seien X ein topologischer Raum, $A \subset X$, $x \in A$ und $y \in X \setminus A$, so dass es einen Weg $s: I \to X$ gibt, der x und y verbindet. Beweise, dass $s(I) \cap \operatorname{Fr} A \neq \varnothing$ gilt. 2

Aufgabe 3. 1. Sei X ein topologischer Raum, so dass jeder Punkt $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung hat. Beweise, dass
- a) jede Wegkomponente von X offen ist;
- b) X genau dann wegzusammenhängend ist, wenn X zusammenhängend ist. 4

2. Sei A eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Beweise, dass A genau dann wegzusammenhängend ist, wenn A zusammenhängend ist.

Zusammenhang vs. Wegzusammenhang

Aufgabe 4. Beweise, dass jeder wegzusammenhängende Raum zusammenhängend ist. 1

Aufgabe 5. 1. Seien $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = sin\frac{1}{x}\right\} \subset \mathbb{R}^2$, und $X = A \cup \{(0,0)\}$. Beweise, dass A wegzusammenhängend und X zusammenhängend sind. Zeichne A und X.

2. Sei $a \in A$. Beweise, dass $A \setminus \{a\}$ und $X \setminus \{a\}$ nicht zusammenhängend (und deswegen nicht wegzusammenhängend) sind.

3. Beweise, dass X nicht wegzusammenhängend ist. 7

Tip: Falls X wegzusammenhängend wäre, könnte man den Punkt $(0,0)$ mit z.B. $(\frac{1}{2\pi}, 0)$ durch einen Weg verbinden. Sei $b_k = (\frac{1}{2\pi k + \pi/2}, 1) \in A$ und $k \geq 1$. Was kann man darüber sagen? Was kann man über $B = \{b_k \mid k \geq 1\} \subset A$ sagen?

Aufgabe 6. Beweise, dass
- a) A eine wegzusammenhängende Teilmenge von X ist, so dass $\operatorname{Cl} A$ nicht mehr wegzusammenhängend ist; 3
- b) A eine nicht-abgeschlossene Wegkomponente von Xist.

Kompaktheit

Aufgabe 7. Betrachte den topologischen Raum der Aufgabe 2.b, 1. Aufgabenblatt. Beweise, dass im diesen Raum
- a) jeder Punkt ein Limes der Folge $\{a_n = n\}$ ist; 3
- b) jede Teilmenge kompakt ist.

Aufgabe 8. Seien A und B kompakte Teilmenge eines topologischen Raumes X. Beweise, dass $A \cup B$ kompakt ist. Finde zwei kompakte Teilmengen A und B, so dass $A \cap B$ nicht kompakt ist. 2

Aufgabe 9. 1. Seien A eine kompakte Teilmenge eines Hausdorffschen Raumes X und $b \in X \setminus A$. Beweise, dass zwei Umgebungen $U_A \supset A$ und $U_b \ni b$ existieren, so dass $U_A \cap U_b = \varnothing$ gilt. 5

2. Beweise, dass jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffschen Raumes abgeschlossen ist.

Aufgabe 10. Beweise, dass der Durchschnitt jeder beliebigen Familie von kompakten Teilmengen in einem Hausdorffschen Raum kompakt ist. (2)

Topologische Konstruktionen

Aufgabe 11. Seien X und Y topologische Räume, $A \subset X$ und $B \subset Y$. Beweise, dass

a) $\mathrm{Cl}(A \times B) = \mathrm{Cl}\, A \times \mathrm{Cl}\, B$;
b) $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}\, A \times \mathrm{Int}\, B$; (3)
c) $\mathrm{Fr}(A \times B) = (\mathrm{Fr}\, A \times \mathrm{Cl}\, B) \cup (\mathrm{Cl}\, A \times \mathrm{Fr}\, B)$.

Aufgabe 12. Beweise, dass

a) das Produkt von zusammenhängenden Räumen zusammenhängend ist;
b) das Produkt von wegzusammenhängenden Räumen wegzusammenhängend ist; (3)
c) das Produkt von kompakten Räumen kompakt ist;
d) das Produkt von Hausdorffschen Räumen Hausdorffsch ist.

Aufgabe 13. Beweise, dass

a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$;
b) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$; (4)
c) $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \cong S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

Aufgabe 14. Beweise, dass

a) der Quotientenraum eines zusammenhängenden Raum zusammenhängend ist;
b) der Quotientenraum eines wegzusammenhängenden Raum wegzusammenhängend ist; (4)
c) der Quotientenraum eines kompakten Raum kompakt ist;
d) $\mathbb{R}/\{\mathbb{R}_+, \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+\}$ nicht Hausdorffsch ist.

Total Punkte: (15)

Abgabe bis Freitag, den 8. Februar, um 10 Uhr.