Dr. Alexander N. Schumakovitch Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Vorlesung Flächen und Mannigfaltigkeiten

3. Aufgabenblatt

Homöomorphismen und homöomorphe Räume

Aufgabe 1. Beweise, dass eine Bijektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann ein Homöomorphismus ist, wenn sie eine monotone Funktion ist. 2

Aufgabe 2. Beweise, dass die folgende ebene Figuren homöomorph sind:

a) $\mathbb{R}^2$;
b) offenes Quadrat $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in (0,1)\}$;
c) offener Streifen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1)\}$;
d) offene Halbebene $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$;
e) offene Scheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$;
f) offenes Rechteck $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a,b), y \in (c,d)\}$;
g) offenes Quadrant $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y > 0\}$.

6

Aufgabe 3. Beweise, dass

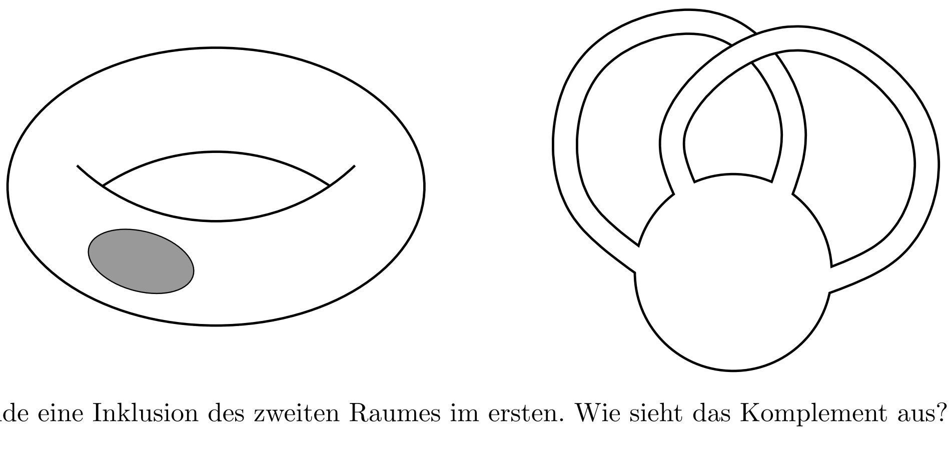
a) die geschlossene Kreisscheibe $D^2 = D_1[0] \subset \mathbb{R}^2$ zum Quadrat $I^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x,y \in [0,1]\}$ homöomorph ist;
b) die offene Kreisscheibe $\operatorname{Int} D^2 = D_1(0 \subset \mathbb{R}^2)$ zum offenen Quadrat $\operatorname{Int} I^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x,y \in (0,1)\}$ homöomorph ist; 3
c) die Kreislinie $S^1 = S_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ zum Rand des Quadrates $\partial I^2 = I^2 \setminus \operatorname{Int} I^2$ homöomorph ist.

Aufgabe 4. Beweise, dass

a) jede konvexe geschlossene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit nichtleerem Innere zu D^2 homöomorph ist;
b) jede konvexe offene beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ zur Ebene homöomorph ist; 5
c) die Begrenzung jeder konvexen beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit nichtleerem Innere zu S^1 homöomorph ist.

Aufgabe 5. Beweise, dass jedes geschlossenes einfaches (d.h. ohne Selbstschnitte) Polygon in $\mathbb{R}^2$ zu S^1 homöomorph ist. 2

Aufgabe 6. Beweise, dass die folgende zwei Räume (ein Torus mit einem Loch und eine Kreisscheibe mit zwei angeklebten Bändern) homöomorph sind. Dieser Raum heisst ein *Henkel*. 10



Tip: Finde eine Inklusion des zweiten Raumes im ersten. Wie sieht das Komplement aus?

Aufgabe 7. Beweise, dass die Räume $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ (mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie), $\mathbb{R}$, der Pfeil und der aus dem Beispiel der Aufgabe 2.b, 1. Aufgabenblatt paarweise nicht homöomorph sind. *3*

Aufgabe 8. Finde eine stetige injektive Abbildung, die nicht eine Einbettung ist. *1*

Aufgabe 9. Finde zwei topologische Räume X und Y, so dass X in Y eingebettet werden kann, Y in X eingebettet werden kann, aber $X \ncong Y$. *1*

Zusammenhang und Wegzusammenhang

Aufgabe 10. 1. Seien A und B Teilmengen eines topologischen Raumes X, die entweder beide offen oder beide abgeschlossen sind, so dass $A \cap B$ und $A \cup B$ zusammenhängend sind. Beweise, dass A und B auch zusammenhängend sind. *4*
2. Finde nichtzusammenhängende A und B, so dass $A \cap B$ und $A \cup B$ zusammenhängend sind.

Aufgabe 11. Beweise, dass die abgeschlossene Hülle einer zusammenhängenden Menge auch zusammenhängend ist. *2*

Aufgabe 12. Sei $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X, so dass für jede λ_1, λ_2 es $A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} \neq \varnothing$ gilt. Beweise, dass $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ auch zusammenhängend ist. *3*

Total Punkte: *42*

Abgabe bis Freitag, den 1. Februar, um 10 Uhr.