Dr. Alexander N. Schumakovitch Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Vorlesung Flächen und Mannigfaltigkeiten

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien (X, Ω) ein topologischer Raum, $A \subset X$ seine Teilmenge und Ω_A die induzierte Topologie auf A. Sei auch Σ eine Basis von Ω. Beweise, dass $\Sigma_A = \{A \cap U \mid U \in \Sigma\}$ eine Basis von Ω_A ist. 2

Eigenschaften von Innere und Äussere

Aufgabe 2. 1. Beweise, dass
- a) $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$, wenn $A \subset B$;
- b) $\operatorname{Int}\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$;
- c) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$ und $\operatorname{Int}(A \cup B) \supset \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$ für beliebige A und B.

2. Finde A und B, so dass $\operatorname{Int}(A \cup B) \not\subset \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$. 5

Aufgabe 3. Finde ähnliche Aussagen für Cl und beweisen sie. 3

Aufgabe 4. Finde $\operatorname{Int}\big((0,1] \cup \{2\}\big)$, $\operatorname{Cl}\big(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}\big)$, und $\operatorname{Fr}\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. 2

Stetige Abbildungen

Aufgabe 5. 1. Seien X ein diskreter Raum und Y ein beliebiger Raum. Beweise, dass jede Abbildung $X \to Y$ stetig ist. Finde ein Beispiel, wann $f : Y \to X$ nicht stetig ist.
2. Seien X ein indiskreter Raum und Y ein beliebiger Raum. Beweise, dass jede Abbildung $Y \to X$ stetig ist. Finde ein Beispiel, wann $f : X \to Y$ nicht stetig ist. 2

Aufgabe 6. Beschreibe explizit alle stetige Abbildungen vom Pfeil in sich selbst. 2

Aufgabe 7. Seien X, Y metrische Räume, und $a \in X$. Beweise, dass die folgende drei Aussagen äquivalent sind:
- a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig in a;
- b) Für jede Kugel $D(f(a)) \subset Y$ mit dem Mittelpunkt $f(a)$ eine Kugel $D(a) \subset X$ mit dem Mittelpunkt a existiert, so dass $f(D(a)) \subset D(f(a))$ gilt;
- c) Für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$ mit $\rho(x, a) < \delta$ es $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$ gilt.

3

Aufgabe 8. Beweise, dass eine Überdeckung Γ von X genau dann fundamental ist, wenn eine Menge $F \subset X$ abgeschlossen ist sobald $F \cap A$ für jedes $A \in \Gamma$ in A abgeschlossen ist. 3

Total Punkte: 22

Abgabe bis Freitag, den 25. Januar, um 10 Uhr.