Dr. Alexander N. Schumakovitch Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Vorlesung Flächen und Mannigfaltigkeiten

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien X eine Ebene, und Ω besteht aus $\varnothing$, X und allen offenen Kreisscheiben, die Mittelpunkte am Koordinatenursprung haben. Ist Ω eine topologische Struktur? 2

Aufgabe 2. Sei $X = \mathbb{R}$ die Zahlengerade. Welches aus folgenden Systemen eine topologische Struktur auf X definiert? 3

a) $\varnothing$ und alle **unendliche** Teilmengen von X;
b) $\varnothing$ und und Komplemente von allen **endlichen** Teilmengen von X.

Aufgabe 3. Sei X eine Menge aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.

1. Beweise, dass alle unendliche arithmetische Folgen eine Basis einer Topologie auf X formen. 3
2. Benutze diese Topologie, um zu zeigen, dass die Menge von allen Primzahlen unendlich ist.
   Tip: sonst wäre die Menge $\{1\}$ offen.

Basen auf $\mathbb{R}^2$.

Man betrachtet folgende drei Systeme vom Teilmengen von $\mathbb{R}^2$:

- Σ^2, das aus allen offenen Kreisscheiben besteht;
- Σ^∞, das aus allen offenen Quadraten besteht, welche durch die Ungleichung $\max\{|x-a|, |y-b|\} < \rho$ definiert sind;
- Σ^1, das aus allen offenen Quadraten besteht, welche durch die Ungleichung $|x-a| + |y-b| < \rho$ definiert sind.

Aufgabe 4. Wie sehen Mengen aus Σ^∞ und Σ^1 aus? 2

Aufgabe 5. Beweise, dass:

1. jedes Element von Σ^2 eine Vereinigung von Elementen aus Σ^∞ ist;
2. der Durchschnitt jeder zwei Elemente von Σ^1 eine Vereinigung von Elementen aus Σ^1 ist; 6
3. jedes der Systeme Σ^2, Σ^∞ und Σ^1 eine Basis für eine topologische Struktur auf $\mathbb{R}^2$ ist, und diese drei Strukturen sind gleich.

Metrische Räume

Erinnerung: Sie X eine Menge. Eine Funktion $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ heisst eine *Metrik* auf X, wenn sie folgende Bedingungen erfühlt:

a) *Positive Definitheit:* $\rho(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$;
b) *Symmetrie:* $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ für alle $x, y \in X$;
c) *Dreiecksungleichung:* $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ für alle $x, y, z \in X$.

Das Paar (X, ρ) heisst ein *metrischer Raum*.

Beispiele:

1. Auf beliebiger Menge X: $(x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x = y; \\ 1, & \text{wenn } x \neq y. \end{cases}$
2. Auf $\mathbb{R}$: $(x,y) \mapsto |x-y|$.
3. Auf $\mathbb{R}^n$: $(x,y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

Die letzte zwei Metriken werden immer gemeint, wenn man $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ als metrische Räume betrachtet (natürlich, wenn keine andere Metrik explizit gegeben ist). Sie heissen *euklidische* Metriken.

4. Auf $\mathbb{R}^n$: $(x, y) \mapsto \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$.
5. Auf $\mathbb{R}^n$: $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.
6. Auf $\mathbb{R}^n$ für $p \geq 1$: $(x, y) \mapsto (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Die Metriken aus 3.–4. sind die spezielle Fälle der Metrik aus 6. für $p = 2$, ∞ und 1.

Seien (X, ρ) ein metrischer Raum, $a \in X$ ein Punkt und r eine positive reelle Zahl. Dann
a) heisst $D_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\}$ eine offene Kugel;
b) heisst $D_r[a] = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\}$ eine geschlossene Kugel;
c) heisst $S_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) = r\}$ eine Sphäre
im Raum (X, ρ) mit dem Mittelpunkt a und dem Radius r.

Aufgabe 6. Beweise, dass das System von allen offenen Kugeln in einem metrischen Raum (X, ρ) eine Basis einer Topologie ist. 3

Diese Topologie heisst eine *metrische Topologie* auf (X, ρ). Man sagt, dass sie von der Metrik induziert ist. Diese topologische Struktur ist immer gemeint, wenn man einen metrischen Raum als ein topologischer Raum betrachtet.

Aufgabe 7. Welche Basen definieren Metriken aus Beispielen 1., 2. und 3.–6. für $n = 2$? Welche topologische Strukturen induzieren sie? 2

Aufgabe 8. Beweise, dass eine Menge A in einem metrischen Raum genau dann offen ist, wenn für jeden Punkt $x \in A$ eine offene Kugel mit dem Mittelpunkt x existiert, die in A enthalten ist. 2

Aufgabe 9. 1. Beweise, dass in einem metrischen Raum
a) eine geschlossene Kugel abgeschlossen ist;
b) eine Sphäre abgeschlossen ist.

2. Finde ein Beispiel von 2
b) einer geschlossenen Kugel, die offen ist;
c) einer offenen Kugel, die abgeschlossen ist;
e) einer Sphäre, die offen ist.

Zwei Metriken auf dieselbe Menge heissen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Topologie induzieren.

Aufgabe 10. Seien X eine Menge, ρ_1 und ρ_2 zwei Metriken auf X und $c, C > 0$ reelle Zahlen, so dass $c\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq C\rho_1(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Beweise, dass ρ_1 und ρ_2 äquivalent sind. Gilt auch die umgekehrte Aussage? 3

Total Punkte: 28

Abgabe bis Montag, den 21. Januar, um 12 Uhr.