Prof. N. A'Campo Wintersemester 2002/03

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen in Topologie und Geometrie

6. Aufgabenblatt

aufgabe1 Sei $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Überdeckung des Raumes $\mathbb{R}^2$ mit Teilmengen $U_\alpha, \alpha \in A$, die beschränkt und offen in $\mathbb{R}^2$ sind. Zeige die Existenz eines Tripels $\alpha, \beta, \gamma \in A$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$.

Aufgabe 2. Seien U_0, U_1, U_2 drei offene Teilmengen in $\mathbb{R}^2$, die ein Dreieck Δ überdecken, derart dass für die Kantenlinien k_0, k_1, k_2 von Δ die Inklusionen $k_i \subset U_i, i = 1, 2, 3$, gelten. Zeige, dass $U_0 \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ gilt.
Hinweis: Gilt $U_0 \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$, dann konstruiere auf Δ eine differenzierbare geschlossene und nicht exakte 1-Differentialform ω!
Ich erinnere Sie auch an den Beweis (1928) von Emanuel Sperner, geboren 1905 in Waltdorf bei Nysa in Polen, verstorben 1980 in Salzburg-Laufen bei Badenweiler, der auf Verfeinerung und Go-Spiel basiert. Siehe auch: F.E. Su, "Rental harmony: Sperner's lemma in fair division", Amer. Math. Monthly, 1999 und spiele mit `http://www.math.hmc.edu/ su/fairdivision/`.

Aufgabe 3. Sei S eine zusammenhängende kompakte Fläche. Sei $p \in S$. Zeige, dass es auf $S \setminus \{p\}$ höchstens zwei paarweise nicht isomorphe reelle Vektorbündel mit Fasern der Dimension 2 gibt. Zeige, dass auf S abzählbar viele paarweise nicht isomorphe reelle Vektorbündel mit Fasern der Dimension 2 existieren.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus ohne Fixpunkte. Bestätige oder wiederlege: es existiert ein Homöomorphismus $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ derart, dass $P \circ f \circ P^{-1}$ eine Translation $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + a \in \mathbb{R}^2$ ist.