Prof. N. A'Campo Wintersemester 2002/03

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen
in Topologie und Geometrie
4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei S^2 die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ mit standard Skalarprodukt. Für $p \in S^2$ wähle eine orthogonale Abbildung $J_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{Spur}(J_p) = \mathrm{Det}(J_p) = 1$ und $J_p(p) = p$, derart dass die Zuordnung $p \in S^2 \mapsto J_p \in \mathrm{O}(3)$ stetig ist. Für eine 1-Differentialform ω auf S^2 sei ω' die 1-Differentialform mit $\omega'_p(u) = \omega_p(J_p(u)), p \in S^2, u \in \mathbb{R}^3, u \perp p$. Zeige, dass die Zuordnung $\omega \mapsto P(\omega) := (d\omega, d\omega')$, die eine 1-Differentialform ω auf S^2 ein Paar von 2-Differentialformen $(d\omega, d\omega')$ auf S^2 zuodnet, ein Differentialoperator der Ordnung 1 ist.

Aufgabe 2. Beschreibe Vektorbündel E, F über S^2 derart, dass P ein Differentialoperator $P : \Gamma^\infty(S^2, E) \to \Gamma^\infty(S^2, F)$ ist. Sind die Bundel E und F isomorph? Ist P elliptisch?

Aufgabe 3. Berechne $\mathrm{Index}(P)$. Ist P injektiv? Bestimme $\mathrm{Bild}(P)$. Konstruiere ein Umkehroperator zu P.

Aufgabe 4. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Dim}(M) > 1$. Seien E, F Vektorbundel über M und sei $P : \Gamma^\infty(M, E) \to \Gamma^\infty(M, F)$ ein elliptischer Differentialoperator ungerader Ordnung. Zeige, dass die reelle Dimension der Bündel E, F gerade ist.

Aufgabe 5. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Seien E, F Vektorbundel über M und sei $P : \Gamma^\infty(M, E) \to \Gamma^\infty(M, F)$ ein elliptischer Differentialoperator. Wir nehmen an, dass auf M ein Vektorfeld ohne Nullstellen existiert. Sind die Bündel E und F isomorph?

Aufgabe 6. Sei q_n ein Skalarprodukt auf einen n-dimensionalen reellen Vektorraum V_n. Zeige, dass die Cliffordalgebra von (V_1, q_1) isomorph zum Körper $\mathbb{C}$ ist. Bestimme die Cliffordalgebra von (V_n, q_n) für $n = 0$ und $n = 2$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ hat die Cliffordalgebra von (V_n, q_n) Nullteiler?

Aufgabe 7. Die Multiplikation mit -1 auf einem Vektorraum V mit quadratischer Form q induziert eine Involution α in $\mathrm{Clifford}(V, q)$. Berechne die Dimensionen der ± 1 Eigenräume $\mathrm{Clifford}^0(V, q)$ und $\mathrm{Clifford}^1(V, q)$ von α.