Prof. N. A'Campo Sommersemester 2002

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen II

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei U eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ und sei ω eine differenzierbare und geschlossene 1-Differentialform auf U. Sei $\gamma : [0,1] \to U$ ein stetiger Weg. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ der folgendermassen definierte stückweise lineare Weg: es gilt $\gamma_n(k/2^n) = \gamma(k/2^n), k = 0, 1, \cdots, 2^n$, und auf $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ ist γ_n linear. Zeige die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$, derart dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ der Weg γ_n in U ist.

Aufgabe 2. (Fortsetzung) Zeige, dass die Folge der Wegintegrale $n \in \mathbb{N}, n \geq N \mapsto \int_{\gamma_n} \omega \in \mathbb{R}$ stationär ist. Definiere das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ für Wege γ in U, die stetig sind.

Aufgabe 3. Zeige, dass die Definition des Wegintegrals $\int_\gamma \omega$ sich nicht sinnvoll auf beliebige stetige Wege γ und beliebige differenzierbare Differentialformen ω ausdehnen lässt.

Aufgabe 4. Definiere das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ für Wege γ, die Lipschitz sind, und für stetig differenzierbare Formen ω.

Aufgabe 5. Sei ω eine differenzierbare 2-Differentialform auf $\mathbb{R}^2$. Konstruiere eine 1-Differentialform α mit $d\alpha = \omega$.

Aufgabe 6. (Fortsetzung) Kann man α mit kompaktem Träger konstruieren, wenn man voraussetzt, dass ω einen kompakten Träger hat?

Aufgabe 7. (Fortsetzung) Wir nehmen an, dass ω kompakten Träger hat und dass $\int_{\mathbb{R}^2} \omega = 0$ gilt. Konstruiere α mit kompaktem Träger, derart dass $d\alpha = \omega$ gilt.