Prof. N. A'Campo Sommersemester 2002

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen II

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oder ein Vektorfeld $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst $\mathbb{Z}^n$-periodisch, wenn für $p \in \mathbb{R}^n$ und $q \in \mathbb{Z}^n$ gilt: $f(p+q) = f(p)$ oder $X_{p+q} = X_p$. Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $\frac{1}{2}q$-anti-periodisch, $q \in \mathbb{Z}^n, q \neq 0$, was heisst dass für $p \in \mathbb{R}^n$ gilt: $g(p + q/2) = -g(p)$. Zeige, dass die partielle Differentialgleichung $\Delta f = g$ eine $\mathbb{Z}^n$-periodische einmal stetig differenzierbare Lösung f hat. Hier ist Δ der Laplaceoperator. Wie ist es möglich, dass Δf für eine einmal stetig differenzierbare Funktion f definiert ist?

Aufgabe 2. (Fortsetzung) Sei $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{Z}^n$-periodisches differenzierbares Vektorfeld. Zeige, dass die partielle Differentialgleichung $\Delta f + Xf = g$ eine $\mathbb{Z}^n$-periodische einmal stetig differenzierbare Lösung f hat. Hier ist Xf die Funktion $(Xf)(p) := (Df)_p(X_p)$.

Aufgabe 3. (Fortsetzung) Zeige, dass die Lösungen der Aufgabe 1 und 2 beliebig oft differenzierbar sind, wenn g und X beliebig oft differenzierbar sind.

Aufgabe 4. Seien $p, q \in T, p \neq q$. Löse die Gleichung $\Delta f = \delta_p - \delta_q$, wobei $\delta_P, P \in T$, das Diracsche Mass mit Träger $\{P\}$ ist.