Prof. N. A'Campo Wintersemester 2001/02

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen I

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 10-mal differenzierbar. F"ur jedes $x \in \mathbb{R}$ existiere ein $k \in \{1, 2, \cdots, 10\}$ so dass die k-te Ableitung von f in x nicht Null ist. Zeige, dass f in $[0, 1]$ nur endlich viele Nullstellen hat.

Aufgabe 2. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 2-mal stetig differenzierbare bogenl"angentreu parametrisierte Kurven. F"ur $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| > 100$ gilt $f(t) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ und $g(t) \in \{0\} \times \mathbb{R}$. F"ur $|t| < 100$ gilt $0 < ||\frac{d^2}{dt^2}f(t)|| < ||\frac{d^2}{dt^2}g(t)||$. Zeige, dass die Kurven $f(\mathbb{R})$ und $g(\mathbb{R})$ sich nur endlich oft schneiden.

Aufgabe 3. Sei $C_r := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid x(p)^2 + y(p)^2 = r^2\}$ und sei $G_s := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid x(p)^2 + y(p)^2 < 1, \exp(\frac{1}{1-x(p)^2+y(p)^2)}) = z(p) + s\}$. Zeige, dass die Zerlegung $\mathbb{R}^3 = \bigcup_{r\in\mathbb{R}, r\geq 1} C_r \cup \bigcup_{s\in\mathbb{R}} G_s$ eine Bl"atterung von $\mathbb{R}^3$ ist. Hinweis: Betrachte auf $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid x(p)^2+y(p)^2 \leq 1\}$ die 1-Differentialform $\omega := (1-r^2)^2 \exp(\frac{-1}{1-r^2})df$ wobei $f(p) := \exp(\frac{1}{1-r(p)^2)}) - z(p)$ und $r(p) := \sqrt{x(p)^2 + y(p)^2}$ sind. Kann man ω auf ganz $\mathbb{R}^3$ als beliebig oft differenzierbare 1-Differentialform fortsetzen? Gibt es eine Fortsetzung, so dass an der Stelle $p \in \mathbb{R}^3$ der Tangentialraum von $C_r, r \geq 1$, oder G_s der Kern von ω_p ist?

Aufgabe 4. Die Bl"atterung $B := C_1 \cup \bigcup_{s\in\mathbb{R}} G_s$ auf $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid x(p)^2 + y(p)^2 \leq 1\}$ ist invariant unter der Translation $p \mapsto p + e_3$, wobei $e_3 = (0, 0, 1)$ ist. Konstruiere eine Bl"atterung auf dem Volltorus $R := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid r(p) \neq 0, ||p - \frac{1}{r(p)}(x(p), y(p), 0)|| \leq \frac{1}{2}\}$.

Aufgabe 5. Zerlege $S^3 := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2 + t(p)^2 = 1\}$ in eine Vereinigung von 2 Volltori, die den Rand gemeinsam haben.

Aufgabe 6. Konstruiere auf S^3 eine Bl"atterung.