Prof. N. A'Campo Wintersemester 2001/02

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen I

10. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei für ein $R \in \mathbb{R}, R > 0$ die Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\gamma_r, 0 \leq r < R$ die Kurve $t \in [0,1] \mapsto f(re^{2\pi it}) \in \mathbb{C}$. Zeige für $0 \leq r < R$,

$$\text{Laenge}(\gamma_r) \geq 2\pi r |f'(0)|.$$

Aufgabe 2. (Fortsetzung) Für $0 < r < R$ und $w \in \mathbb{C}$ sei $n_r(w) := \#\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r, f(z) = w\}$. Zeige für $0 \leq r < R$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_r(x+iy) dxdy \geq \pi r^2 |f'(0)|^2.$$

Hinweis: Interpretiere das Mehrfachintegral als Flächeninhalt einer Fläche in Schichten. Genauer, zeige

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_r(x+iy) dxdy = \int_{u^2+v^2 \leq r^2} |f'(u+iv)|^2 dudv,$$

und schliesse mit

$$\int_{u^2+v^2 \leq r^2} |f'(u+iv)|^2 dudv \geq \pi r^2 |\text{MW}_{\{u^2+v^2 \leq r^2\}} f'(u+iv)^2| = \pi r^2 |f'(0)|^2.$$

Aufgabe 3. (Fortsetzung) Sei $0 < r < R$. Zeige, dass eine holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \to \mathbb{C}$ mit $|f| \leq r$ und $|f'(0)| \geq 1$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 4. Zeichne $L := \{z \in \mathbb{C} \mid (\Re z)^4 - (\Re z)^2 + (\Im z)^2 = 0\}$. Zeige, dass keine holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\} \to \mathbb{C}$ existiert, derart dass die parametrizierte Kurve $t \in [0,1] \mapsto f(e^{2\pi it}) \in \mathbb{C}$ die Kurve L einmal durchläuft.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Zeige, dass $z \in \mathbb{C} \mapsto f'(z) = (Df)_z(1) \in \mathbb{C}$ konstant ist. Es gilt $f(0) \neq 0$ und $f(z) = f(0) + f'(0)z, z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 6. Sei U eine offene Teilmenge im Quaternionenraum $Q := \{a + xi + yj + zk\}_{(a,x,y,z) \in \mathbb{R}^4}$. Q ist ein Schiefkörper. Sei die Abbildung $f : U \to Q$ differenzierbar mit einem Differential, dass von Links Q-linear ist. (Hat zum Beispiel $f(a + xi + yj + zk) := i(a + xi + yj + zk) = -x + ai - zj + yk$ oder $f(a + xi + yj + zk) := (a + xi + yj + zk)^2$ diese Eigenschaften?) Zeige, dass $p \in U \mapsto (Df)_p(1) \in \mathbb{C}$ konstant ist.