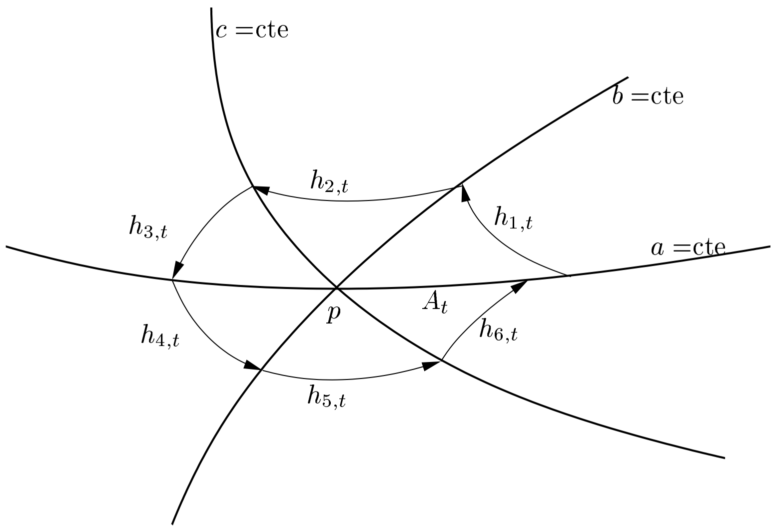
Prof. N. A'Campo Wintersemester 2001/02

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen I

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien $a, b, c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ drei zweimal stetig differenzierbare Funktionen, deren Differentiale punktweise und paarweise linear unabhängig sind, und so dass für ein einziges $p \in \mathbb{R}^2$ Konstanten $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p > 0$ mit $\alpha_p(Da)_p + \beta_p(Db)_p + \gamma_p(Dc)_p = 0$ und $\alpha_p^2 + \beta_p^2 + \gamma_p^2 = 1$ existieren. Zeige, dass positive differenzierbare Funktionen $\alpha, \beta, \gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(q)(Da)_q + \beta(q)(Db)_q + \gamma(q)(Dc)q = 0$ und $\alpha(q)^2 + \beta(q)^2 + \gamma(q)^2 = 1, q \in \mathbb{R}^2$, existieren.

Aufgabe 2. (Fortsetzung.) Für $p \in \mathbb{R}^2, t \in R$, wobei t hinreichend klein vorausgesetzt wird, betrachten wir einen stetigen Polygonzug H_t, der aus 7 differenzierbaren Abschnitten $A_t, h_{1,t}, h_{2,t}, h_{3,t}, h_{4,t}, h_{5,t}, h_{6,t}$ besteht.



Diese Abschnitte sind die folgendermassen definierten parametrisierten Kurven:

- $A_t : [0, t] \to \mathbb{R}^2$, wobei $A_t(0) = p, a(A_t(s)) = a(p), b(A_t(s)) = b(p) - s$;
- $h_{1,t} : [0, t] \to \mathbb{R}^2$, wobei $\frac{d}{ds}c(h_{1,t}(s)) = 0$ und $\frac{d}{ds}b(h_{1,t}(s)) \neq 0, h_{1,t}(0) = A_t(t), b(h_{1,t}(t)) = b(p)$;
- $h_{2,t} : [0, t] \to \mathbb{R}^2$ mit $\frac{d}{ds}a(h_{2,t}(s)) = 0$ und $\frac{d}{ds}c(h_{2,t}(s)) \neq 0, h_{2,t}(0) = h_{1,t}(t), c(h_{2,t}(t)) = c(p)$;
- $h_{3,t} : [0, t] \to \mathbb{R}^2$ mit $\frac{d}{ds}b(h_{3,t}(s)) = 0$ und $\frac{d}{ds}c(h_{3,t}(s)) \neq 0, h_{3,t}(0) = h_{2,t}(t), a(h_{3,t}(t)) = b(p)$;
- $h_{4,t} : [0, t] \to \mathbb{R}^2$ mit $\frac{d}{ds}c(h_{4,t}(s)) = 0$ und $\frac{d}{ds}b(h_{1,t}(s)) \neq 0, h_{4,t}(0) = h_{3,t}(t), b(h_{4,t}(t)) = b(p)$;

- $h_{5,t} : [0,t] \to \mathbb{R}^2$ mit $\frac{d}{ds}a(h_{5,t}(s)) = 0$ und $\frac{d}{ds}c(h_{5,t}(s)) \neq 0, h_{5,t}(0) = h_{4,t}(t), c(h_{5,t}(t)) = c(p)$;
- $h_{6,t} : [0,t] \to \mathbb{R}^2$ mit $\frac{d}{ds}b(h_{6,t}(s)) = 0$ und $\frac{d}{ds}a(h_{6,t}(s)) \neq 0, h_{6,t}(0) = h_{5,t}(t), a(h_{6,t}(t)) = a(p)$.

Zeige, dass für jedes $p \in \mathbb{R}^2$ der Grenzwert

$$g(a,b,c:p) := \lim_{t\to 0} \frac{b(p) - b(A_t(t))}{b(p) - b(h_{6,t}(t))}$$

existiert.

Aufgabe 3. (Fortsetzung.) Seien $a', b', c' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen ohne kritische Punkte, deren Niveaus lokal mit den Niveaus der Funktionen a, b, c übereinstimmen. Zeige: $g(a', b', c' : p) = g(a, b, c : p)$.

Aufgabe 4. (Fortsetzung.) Berechne $g(a, b, c; -) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für $a = x, b = y, c = x - y + \frac{\sin(x+y)}{4}$.

Eine Aufteilung der Ebene $\mathbb{R}^2$ in Linienscharen, die sich lokal als Niveaulinien von 3 Funktionen ohne kritische Punkte mit paarweise linear unabhängigen Differentialen beschreiben lassen, heisst 2-*dimensionales* 3-*Gewebe*. Ein 2-dimensionales 3-Gewebe heisst *infinitesimal schliessend*, wenn die Funktion g identisch 1 ist. Für ein weiteres Studium der Gewebe ist das Gründerbuch dieser Theorie sehr zu empfehlen:

Wilhelm Blaschke und G. Bol, Geometrie der Gewebe: Topologische Fragen der Differentialgeometrie, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **49**, Berlin : Springer, 1938.

Aufgabe 5. Sei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + ex + fy + g = 0\}$ eine ebene kubische Kurve. Wir setzen voraus, dass die Kurve K glatt ist und aus zwei Komponenten besteht. Zum Beispiel $K := \{x(x^2 + y^2 - 100) - 1 = 0\}$. Es existiert eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ derart, dass für $p \in U$ durch p genau 4 Tangentiallinien an K existieren. Zeige, dass auf U ein 3-Gewebe existiert, dass punktweise tangent an 3 Tangentiallinien an K ist. Berechne die g-Funktion für dieses Gewebe. Ist das Gewebe (infinitesimal) schliessend?