Prof. N. A'Campo Lenzsemester 2009

# Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie

5. Aufgabenblatt

**Aufgabe 1**. Seien $A, B, C, D, E$ Punkte in $\mathbb{R}^2$ mit:

$$x(A) = y(A) = y(E) = 0, x(E) = 7,$$

$$(x(A) - x(B))^2 + (y(A) - y(B))^2 = (x(B) - x(C))^2 + (y(B) - y(C))^2 =$$

$$(x(C) - x(D))^2 + (y(C) - y(D))^2 = (x(D) - x(E))^2 + (y(D) - y(E))^2 = 4$$

Diese Gleichungen kann man auffassen als Abbildung $G : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^8$. Sei $M \subset (\mathbb{R}^2)^5 = \mathbb{R}^{10}$ die Lösungsmenge der Gleichungen. Zeige, dass $M$ eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{10}$ ist.

**Aufgabe 2**. (Fortsetzung). Zeige, dass $M$ und die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$ diffeomorph sind. Hinweis: Sei $\theta > \frac{\pi}{2}$ ein Winkel des Euklidischen Dreiecks mit Kantenlänge $2, 7, 8$. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ die Funktion $(A, B, C, D, E) \in M \mapsto f(A, B, C, D, E) := y(B) \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $f$ eine Morsefunktion auf $M$ ist. Die Funktion $f$ hat nur zwei kritische Punkte und die kritische Werte $\pm 2\cos(\theta)$.

**Aufgabe 3**. (Fortsetzung). Wir betrachten $\mathbb{R}^{10}$ als Euklidischer Vektorraum und wir statten $M$ mit der von $\mathbb{R}^{10}$ induzierten Riemannschen Metrik aus. Für $p \in M$ und $u \in \mathbb{R}^{10}$ sei $v \in \mathbb{R}^{10}$ mit $(DG)_p(v) = 0$ derart, dass das Skalarprodukt $(u - v, u - v)_{\mathbb{R}^{10}}$ minimal ist. Zeige, dass $v$ eindeutig ist. Wir definieren $P_p : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{10}$ mit $P_p(u) = v$. Zeige, dass $P_p$ eine lineare Projektion ist.

**Aufgabe 4**. (Fortsetzung). Sei $\gamma : (0, 1) \to \mathbb{R}^{10}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Kurve mit $\text{Bild}(\gamma) \subset M$. Zeige, dass $\gamma$ eine Geodätische auf $M$ ist, genau wenn für alle $t \in (0, 1)$ gilt:

$$P_{\gamma(t)}(\frac{d^2}{dt}\gamma(t)) = 0$$

Hinweis: Beschreibe mittels den Projektoren $P_p, p \in M$ den Levi-Civita Zusammenhang auf $M$.

**Aufgabe 5**. Konstruiere eine nicht konstante periodische Geodätische auf $M$. Hinweis: Betrachte auf $M$ die Untermannigfaltigkeit die durch $y(B) = y(D)$ gegeben ist.